Taula de Continguts

Assignatura: Control Automàtic

Codi: 220021

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

EXAMEN DE CONTROL AUTOMÀTIC

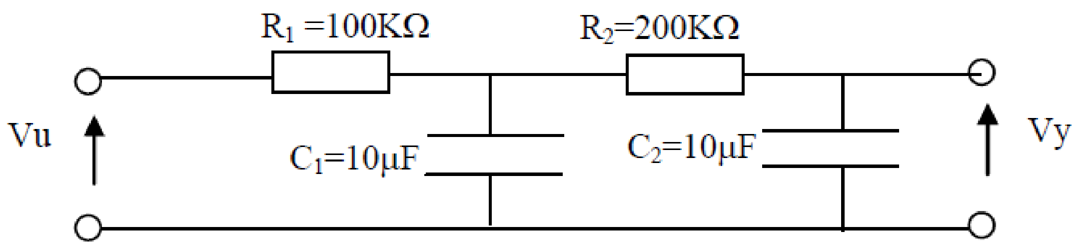
Grau en Enginyeria en Tecnologies Aeroespacials
Grau en Enginyeria en Vehicles Aeroespacials
Divendres 13 de Novembre de 2020 a les 11:00 hores

La durada total de l'examen és de 2:30 hores i la puntuació és sobre 10.

Primera Part: SENSE APUNTS

Nom i Cognoms de l'estudiant: ______________________________________

1. **(2 Punts)** Trobeu la representació interna (espai d'estat) canònica i la representació interna física (si les variables d'estat són les tensions dels condensadors C_1 i C_2) del circuit elèctric següent:



Nota: Forma canònica controlable

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 & b_1 - b_n a_1 & b_2 - b_n a_2 & \cdots & b_{n-2} - b_n a_{n-2} & b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} + b_n u$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola Superior d'Enginyeries Industrial,
Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

EXAMEN DE CONTROL AUTOMÀTIC

Grau en Enginyeria en Tecnologies Aeroespacials
Grau en Enginyeria en Vehicles Aeroespacials

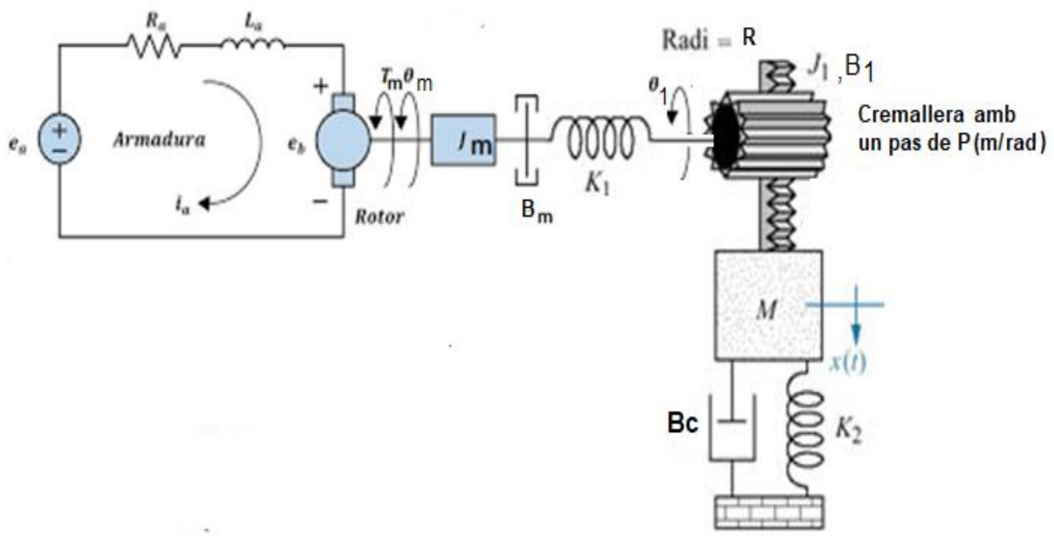
Divendres 13 de Novembre de 2020 a les 11:00 hores

La durada total de l'examen és de 2:30 hores i la puntuació és sobre 10.

Segona Part

Nom i Cognoms de l'estudiant: ____

2. **(3 Punts)** La figura representa un motor de corrent continua que ha de controlar la posició vertical x(t) d'una massa M. A tal efecte es disposa d'un cilindre dentat que gira amb un angle θ_1 i que tradueix aquest moviment angular a un moviment de translació vertical gràcies a una cremallera dentada que es desplaça P metres per cada radian del cilindre, el qual té un moment d'inèrcia J_1 i un fregament B_1. El motor de corrent continua té els paràmetres habituals K_b, K_m, J_m i B_m. Entre l'eix del motor θ_m i l'eix del cilindre dentat θ_1 hi ha una molla de torsió amb constant K_1. La massa M està encaixada a la cremallera i en la seva part inferior hi ha una molla de constant K_2 i un fregament B_c.



2.1. Determineu totes les equacions diferencials d'aquest sistema o alternativament el diagrama de blocs elementals amb totes les variables que intervenen en el sistema.

2.2. Determineu la funció de transferència dels desplaçament vertical de la massa X(s) enfront del parell $T_{K1}(s)$ generat per la molla de torsió, ja sigui utilitzant les equacions diferencials o bé simplificant el diagrama de blocs elementals de l'apartat 2.1.

3. **(3 Punts)** El model dinàmic d'un sistema mecànic de rotació esta donat per les equacions següents:

$$I\frac{d^2q_1}{dt^2}+b_1\frac{dq_1}{dt}+MgL\,\mathbf{sin(}q_1\mathbf{)}+k\sqrt{\mathbf{(}q_1-q_2\mathbf{)}}=0$$

$$J\frac{d^2q_2}{dt^2}+b_2\frac{dq_2}{dt}-k\sqrt{\mathbf{(}q_1-q_2\mathbf{)}}=u$$

On q_1 i q_2 són les posicions angulars, I i J són els moments d'inèrcia, k constant de la molla, M és la massa, L la distància, g la constant de la gravetat i u és el parell d'entrada.

3.1. Trieu les variables d'estats adequades i representeu el sistema no lineal en espai d'estat en funció d'aquestes variables. L'entrada del sistema és u i la sortida $y = [q_1 \quad q_2]^T$.

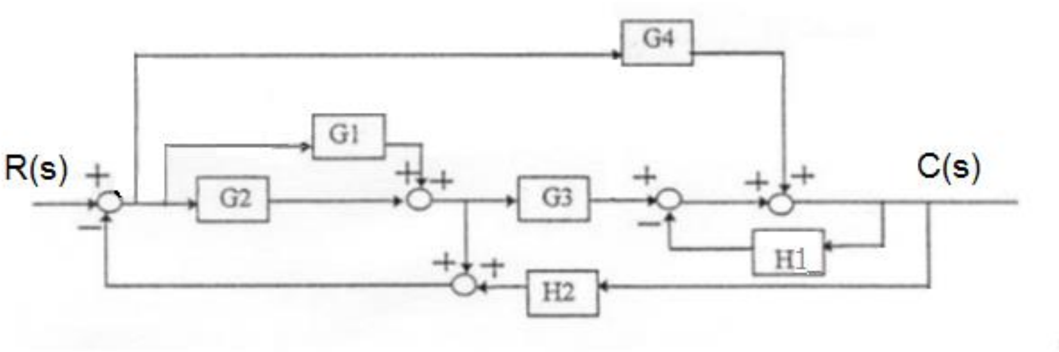
3.2. Determineu el punt d'equilibri d'aquest sistema en funció de la posició desitjada $q_1 = \overline{q}_1$.

3.3. Linealitzeu les equacions al voltant d'aquest punt d'equilibri i representeu el model linealitzat en format matricial (espai d'estat).

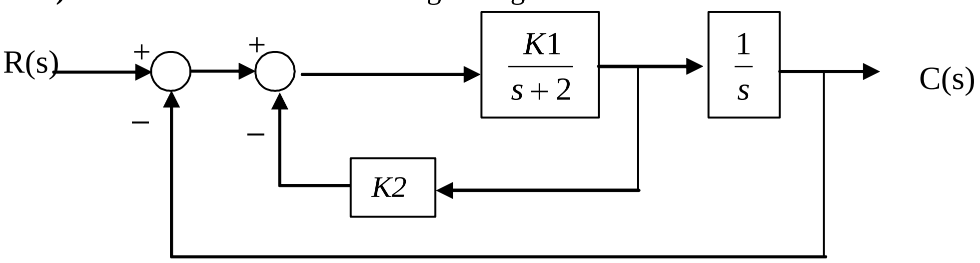
3.4. Calculeu la funció de transferència $G(s) = \Delta Q_1(s)/\Delta U(s)$

3.5. A partir de *G(s)* determineu les equacions en espai d'estat del sistema segons la forma canònica controlable.

4. **(1 Punt)** Es demana de reduir el diagrama de blocs següent aplicant les regles de l'àlgebra de blocs o la regla de Mason i trobar la funció de transferència C(s)/R(s).

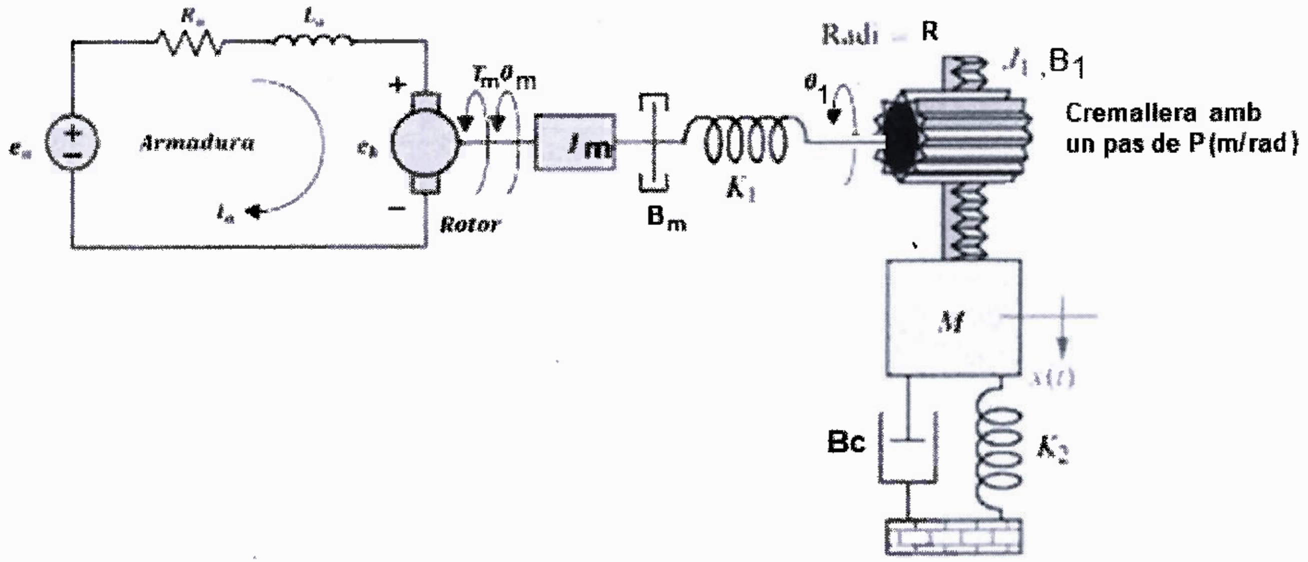


5. **(1 Punt)** Considerem el sistema de la figura següent:



Determineu els valors de K1 i de K2 per tal que el sistema realimentat, $\frac{C(s)}{R(s)}$, tingui un sobrepic (overshoot) del 5% i un temps d'establiment de 4s.

SOLUCIO



1. Equacions diferencials

$$e_a(t) = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e_b(t)$$

$$\gamma_m(t) = K_m i_a = J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + B_m \frac{d\theta_m}{dt} + K_1(\theta_m(t) - \theta_1(t))$$

$$K_1(\theta_m(t) - \theta_1(t)) = J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + B_1 \frac{d\theta_1}{dt} + \gamma_{res}(t)$$

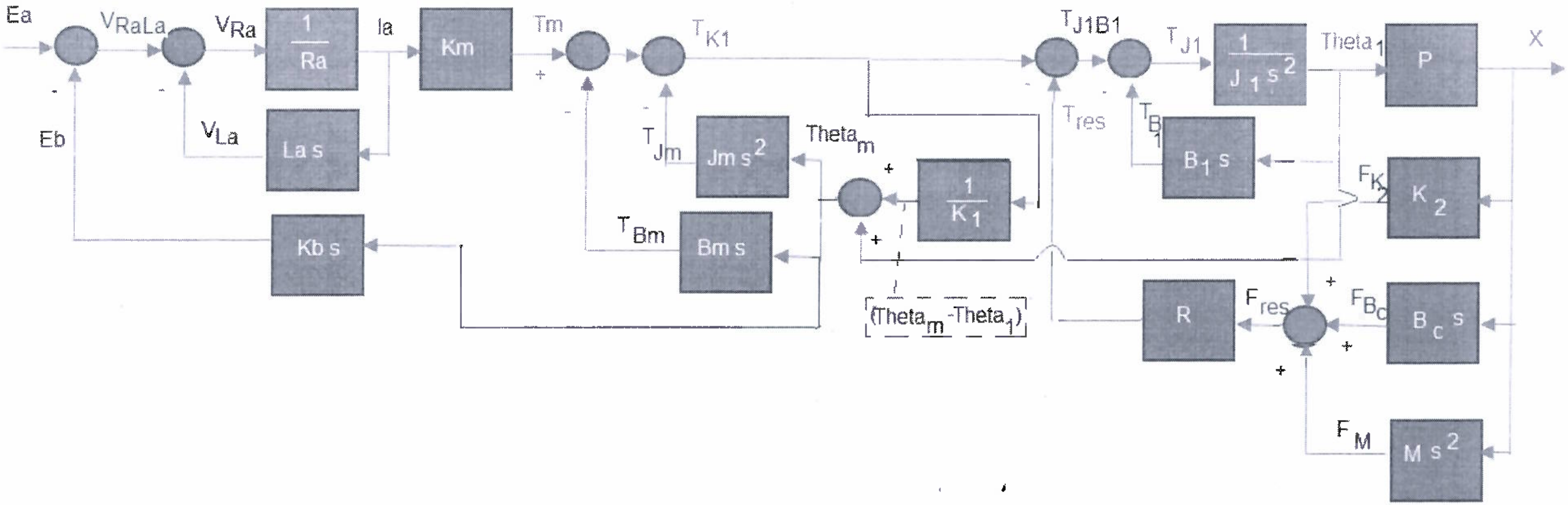
$$x(t) = P\theta_1(t)$$

$$F_{res}(t) = M \frac{d^2x}{dt^2} + B_c \frac{dx}{dt} + K_2 x(t)$$

$$\gamma_{res}(t) = R \cdot F_{res}(t)$$

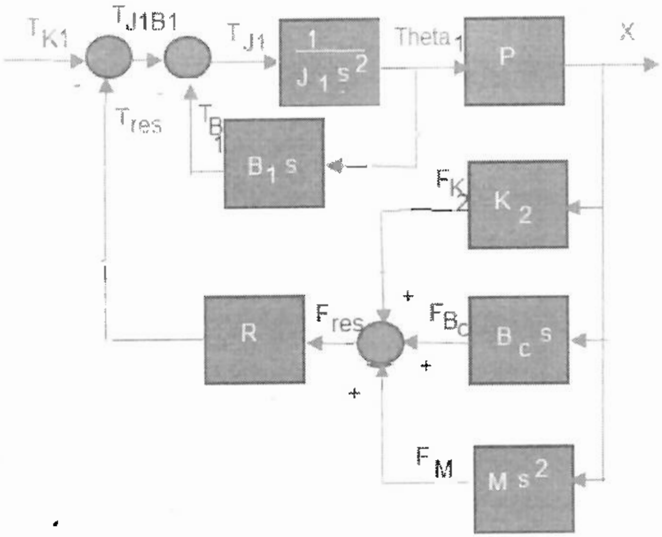
$\cancel{\gamma_{res}(t) = R.F_{res}(t)}$

1'. Alternativament diagrama de blocs elementals:



2.- Funció de trnsferència: $X(s)/T_{K1}(s)$

A partir del diagrama de blocs només cal estudiar:



O bé les equacions diferencials seguents:

$$T_{K1} = J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + B_1 \frac{d\theta_1}{dt} + \gamma_{res}(t)$$

$$x(t) = P\theta_1(t)$$

$$F_{res}(t) = M\frac{d^2x}{dt^2} + B_c\frac{dx}{dt} + K_2x(t)$$

$$\gamma_{res}(t) = R.F_{res}(t)$$

$$\frac{X(s)}{Tk1(s)} = \frac{P}{(J_1 + P.R.M)s^2 + (B_1 + P.R.Bc)s + P.R.K_2}$$

Solució Examen Parcial CA_2020

Exercici 3:

$$X_1 = q_1 \;;\; X_2 = \dot{q}_1 \;;\; X_3 = q_2 \;;\; X_4 = \dot{q}_2$$

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = -\dfrac{b_1}{I} X_2 - \dfrac{MgL}{I} \sin(X_1) - \dfrac{k}{I}\sqrt{(X_1 - X_3)} \\ \dot{X}_3 = X_4 \\ \dot{X}_4 = \dfrac{u}{J} - \dfrac{b_2}{J} X_4 + \dfrac{k}{J}\sqrt{(X_1 - X_3)} \end{cases}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}$$

3.2 Punt d'equilibri

$$\begin{cases} \bar{X}_2 = 0 \\ -\dfrac{b_1}{I} \bar{X}_2 - \dfrac{MgL}{I} \sin(\bar{X}_1) - \dfrac{k}{I}\sqrt{(\bar{X}_1 - \bar{X}_3)} = 0 \\ \bar{X}_4 = 0 \\ \dfrac{\bar{u}}{J} - \dfrac{b_2}{J} \bar{X}_4 + \dfrac{k}{J}\sqrt{(\bar{X}_1 - \bar{X}_3)} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{X}_2 = 0 \\ k\sqrt{(\bar{X}_1 - \bar{X}_3)} = -MgL \sin(\bar{X}_1) \\ \bar{X}_4 = 0 \\ \bar{u} = -k\sqrt{(\bar{X}_1 - \bar{X}_3)} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \bar{X}_2 = 0 \\ \bar{u} = -MgL \sin(\bar{X}_1) \\ \bar{X}_4 = 0 \\ \bar{u}^2 = k^2(\bar{X}_1 - \bar{X}_3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{X}_2 = 0 \\ \bar{u} = MgL \sin(\bar{X}_1) \\ \bar{X}_4 = 0 \\ \bar{u}^2 = k^2(\bar{X}_1 - \bar{X}_3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{X}_2 = 0 \\ \bar{u} = MgL \sin(\bar{X}_1) \\ \bar{X}_4 = 0 \\ \bar{X}_3 = \bar{X}_1 - \dfrac{\bar{u}^2}{k^2} = \bar{X}_1 - \left(\dfrac{MgL \sin(\bar{X}_1)}{k}\right)^2 \end{cases}$$

3.3 Linealització i presentació matricial

$$\frac{d(\Delta X)}{dt} = A\Delta X + B\Delta U$$

$$\Delta Y = C\Delta X$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{-MgL}{I}\cos(\bar{X}_1) - \dfrac{k}{2I\sqrt{\bar{X}_1 - \bar{X}_3}} & \dfrac{-b_1}{I} & \dfrac{k}{2I\sqrt{\bar{X}_1 - \bar{X}_3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k}{2J\sqrt{\bar{X}_1 - \bar{X}_3}} & 0 & \dfrac{-k}{2J\sqrt{\bar{X}_1 - \bar{X}_3}} & \dfrac{-b_2}{J} \end{bmatrix} \;;\; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{J} \end{bmatrix} \;;\; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta X = \begin{bmatrix} \Delta X_1 & \Delta X_2 & \Delta X_3 & \Delta X_4 \end{bmatrix}^T$$

3.4. Funció de transferència

$$\begin{cases} \Delta\dot{X}_1 = \Delta X_2 \\ \Delta\dot{X}_2 = a_{21}\Delta X_1 + a_{22}\Delta X_2 + a_{23}\Delta X_3 \\ \Delta\dot{X}_3 = \Delta X_4 \\ \Delta\dot{X}_4 = a_{41}\Delta X_1 + a_{43}\Delta X_3 + a_{44}\Delta X_4 + \dfrac{\Delta u}{J} \end{cases}$$

$$a_{21} = \frac{-MgL}{I}\cos(\bar{X}_1) - \frac{k}{2I\sqrt{\bar{X}_1 - \bar{X}_3}}$$

$$a_{22} = \frac{-b_1}{I} \quad ; \quad a_{23} = \frac{k}{2I\sqrt{\bar{X}_1 - \bar{X}_3}}$$

$$a_{41} = -a_{43} = \frac{k}{2J\sqrt{\bar{X}_1 - \bar{X}_3}} \quad ; \quad a_{44} = \frac{-b_2}{J}$$

Aa

$$\xrightarrow{T.L\ amb\ C.I=0} \begin{cases} s\Delta X_1(s) = \Delta X_2(s) \\ s\Delta X_2(s) = a_{21}\Delta X_1(s) + a_{22}\Delta X_2(s) + a_{23}\Delta X_3(s) \\ s\Delta X_3(s) = \Delta X_4(s) \\ s\Delta X_4(s) = a_{41}\Delta X_1(s) + a_{43}\Delta X_3(s) + a_{44}\Delta X_4(s) + \dfrac{\Delta U(s)}{J} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} s^2\Delta X_1(s) = a_{21}\Delta X_1(s) + a_{22}s\Delta X_1(s) + a_{23}\Delta X_3(s) \\ s^2\Delta X_3(s) = a_{41}\Delta X_1(s) + a_{43}\Delta X_3(s) + a_{44}s\Delta X_3(s) + \dfrac{\Delta U(s)}{J} \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \Delta X_3(s) = \dfrac{\left(s^2 - a_{22}s - a_{21}\right)}{a_{23}}\Delta X_1(s) \\ \left(s^2 - a_{43} - a_{44}s\right)\Delta X_3(s) = a_{41}\Delta X_1(s) + \dfrac{\Delta U(s)}{J} \end{cases} \rightarrow \left(\left(s^2 - a_{43} - a_{44}s\right)\frac{\left(s^2 - a_{22}s - a_{21}\right)}{a_{23}} - a_{41}\right)\Delta X_1(s) = \frac{\Delta U(s)}{J}$$

$$\rightarrow \left(\left(s^2 - a_{43} - a_{44}s\right)\left(s^2 - a_{22}s - a_{21}\right) - a_{41}a_{23}\right)\Delta X_1(s) = \frac{a_{23}}{J}\Delta U(s)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\Delta X_1(s)}{\Delta U(s)} = \frac{\dfrac{a_{23}}{J}}{\left(s^2 - a_{43} - a_{44}s\right)\left(s^2 - a_{22}s - a_{21}\right) - a_{41}a_{23}}$$

$$\frac{\Delta X_1(s)}{\Delta U(s)} = \frac{\dfrac{a_{23}}{J}}{s^4 - s^3\left(a_{44} + a_{22}\right) + s^2\left(-a_{21} - a_{43} + a_{22}a_{44}\right) + s\left(a_{21}a_{44} + a_{22}a_{43}\right) + a_{43}a_{21} - a_{41}a_{23}}$$

$$\frac{\Delta X_1(s)}{\Delta U(s)} = \frac{b_0}{s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0}$$

$$b_0 = \frac{k}{2IJ\sqrt{\bar{X}_1 - \bar{X}_3}} \quad ; \quad a_3 = \frac{b_1}{I} + \frac{b_2}{J} \quad ; \quad a_2 = \frac{MgL}{I}\cos(\bar{X}_1) + \frac{k}{2I\sqrt{\bar{X}_1 - \bar{X}_3}} + \frac{k}{2J\sqrt{\bar{X}_1 - \bar{X}_3}} + \frac{b_1b_2}{IJ}$$

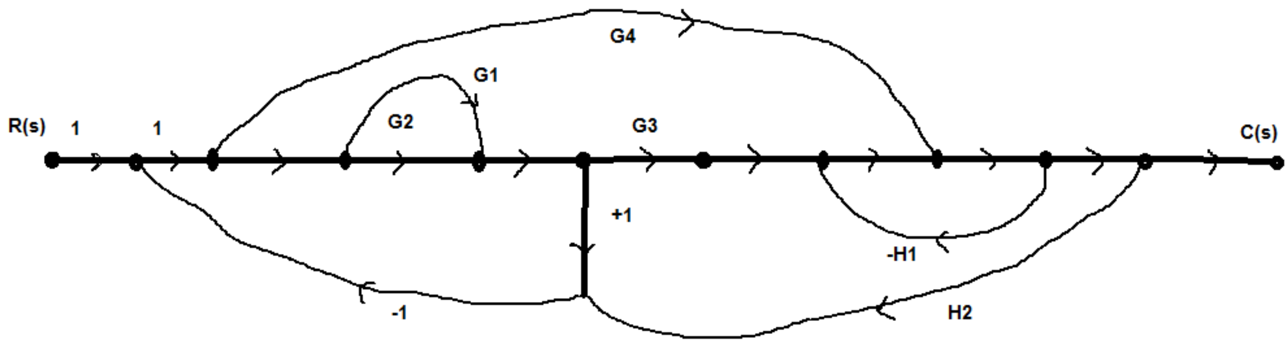
$$a_1 = \frac{b_2}{J}\left(\frac{MgL}{I}\cos(\bar{X}_1) + \frac{k}{2I\sqrt{\bar{X}_1 - \bar{X}_3}}\right) + \frac{b_1}{I}\frac{k}{2J\sqrt{\bar{X}_1 - \bar{X}_3}} \quad ; \quad a_0 = \frac{k}{2J\sqrt{\bar{X}_1 - \bar{X}_3}}\frac{MgL}{I}\cos(\bar{X}_1)$$

Espai d'estat canònic:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \\ \Delta\dot{x}_3 \\ \Delta\dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix}$$

Exercici 4:



Camins directes	Llaços	Llaços disjunts
P1=G2G3 P2=G4 P3=G1G3	L1=-G2 L2=-G1 L3=-G2G3H2 L4=-G1G3H2 L5=-G4H2 L6=-H1	L1L6 L2L6

$$\textit{Determinant:}\quad \Delta = 1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 - L_5 - L_6 + L_1L_6 + L_2L_6$$

Cofactors:

$$\Delta_1 = 1 \quad ; \quad \Delta_2 = 1 \quad ; \quad \Delta_3 = 1$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{\Delta} = \frac{G_2G_3 + G_1G_3 + G_4}{1 + G_2 + G_1 + G_2G_3H_2 + G_1G_3H_2 + G_4H_2 + H_1 + G_2H_1 + G_1H_1}$$

Exercici 5:

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{G(s)\frac{1}{s}}{1+G(s)\frac{1}{s}} \quad ; \quad G(s)=\frac{\frac{K_1}{s+2}}{1+K_2\frac{K_1}{s+2}}=\frac{K_1}{s+2+K_1K_2}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\frac{K_1}{s(s+2+K_1K_2)}}{1+\frac{K_1}{s(s+2+K_1K_2)}}=\frac{K_1}{s(s+2+K_1K_2)+K_1}=\frac{K_1}{s^2+(2+K_1K_2)s+K_1}=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\begin{cases}K_1=\omega_n^2\\2+K_1K_2=2\xi\omega_n\end{cases}$$

$$M_P=0.05 \quad\rightarrow\quad \xi=\sqrt{\frac{(Ln(M_P))^2}{\pi^2+(Ln(M_P))^2}}=0.69\approx 0.7$$

$$t_s=\frac{4}{\xi\omega_n} \quad\rightarrow\quad t_s=4 \quad\rightarrow\quad \xi\omega_n=1 \quad\rightarrow\quad \omega_n=\frac{1}{\xi}=1.4491\,rad/s$$

$$\rightarrow\begin{cases}K_1=\omega_n^2\\2+K_1K_2=2\end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}K_1=2.0991\\K_1K_2=0\end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}K_1\approx 2.1\\K_2=0\end{cases}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

0/2

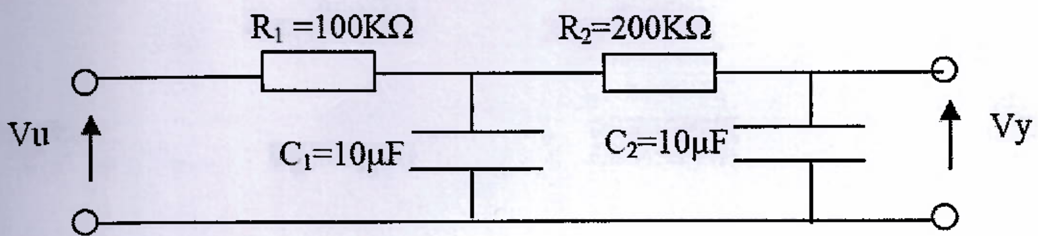
EXAMEN DE CONTROL AUTOMÀTIC

Grau en Enginyeria en Tecnologies Aeroespacials
Grau en Enginyeria en Vehicles Aeroespacials
Divendres 13 de Novembre de 2020 a les 11:00 hores

La durada total de l'examen és de 2:3 …).

Nom i Co

1. **(2 Punts)** … epresentació interna fí … C_1 i C_2) del circuit elè …



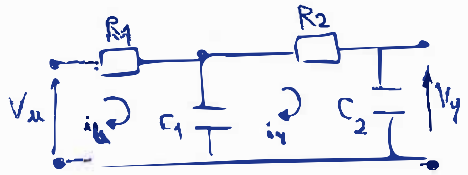
Nota: Forma canònica controlable

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 & b_1 - b_n a_1 & b_2 - b_n a_2 & \cdots & b_{n-2} - b_n a_{n-2} & b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} [x] + b_n u$$

IAL CONTROL AUTOMÀTIC PRIMERA PART

1)



primer trobem les equacions diferencials amb totes les variables

EE FÍSIC: les entrades seràn V_u y V_y

variables estat V_{C_1} i V_{C_2}

$$\begin{cases} V_u = R_1 I_u + \underbrace{\frac{1}{C_1 s} I_u}_{V_{C_1}} \rightarrow u_u(t) = R_1 I_u + \dot{X}_1 = R_1 X_1 + \dot{X}_1 \\ V_y = \underbrace{\frac{1}{C_2 s} I_y}_{V_{C_2}} \longrightarrow u_y(t) = \dot{X}_2 \end{cases}$$

$I_u = X_1$

0/2

INTERNA FÍSICA

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{C_1}/u(t) \\ u_{C_2}/u(t) \end{bmatrix} u(t)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{3} + \left(\frac{1{,}25}{3}\right) + \left(\frac{1}{1}\right) + \left(\frac{0{,}75}{1}\right)$

EXAMEN DE CONTROL AUTOMÀTIC

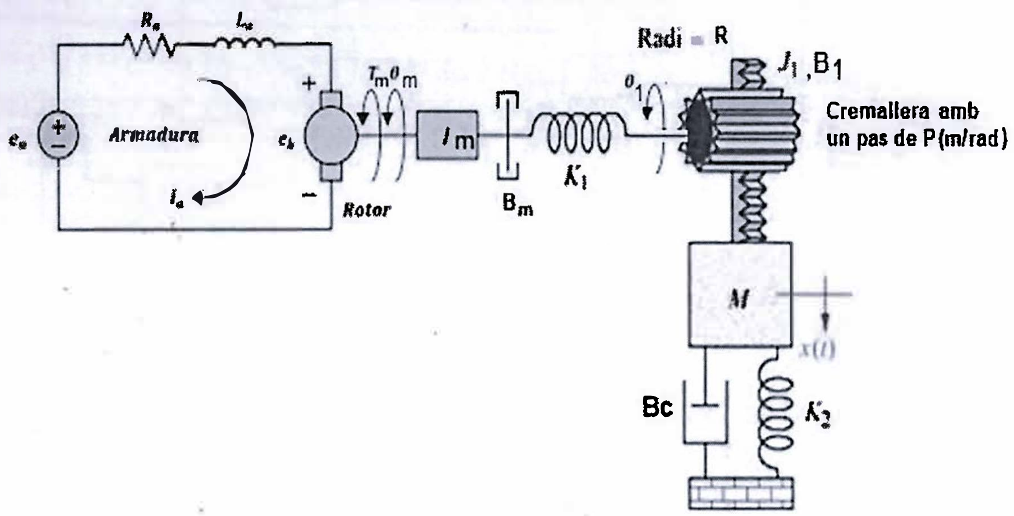
Grau en Enginyeria en Tecnologies Aeroespacials
Grau en Enginyeria en Vehicles Aeroespacials

Divendres 13 de Novembre de 2020 a les 11:00 hores

La du ... sobre 10

Nom i Cogno

2. **(3 Punts)** La ... la posició vertical x(t) d' ... un angle θ_1 i que tradue ... cies a una cremallera dentada que es desplaça P metres per cada radian del cilindre, el qual té un moment d'inèrcia J_1 i un fregament B_1. El motor de corrent continua té els paràmetres habituals K_b, K_m, J_m i B_m. Entre l'eix del motor θ_m i l'eix del cilindre dentat θ_1 hi ha una molla de torsió amb constant K_1. La massa M està encaixada a la cremallera i en la seva part inferior hi ha una molla de constant K_2 i un fregament B_c.



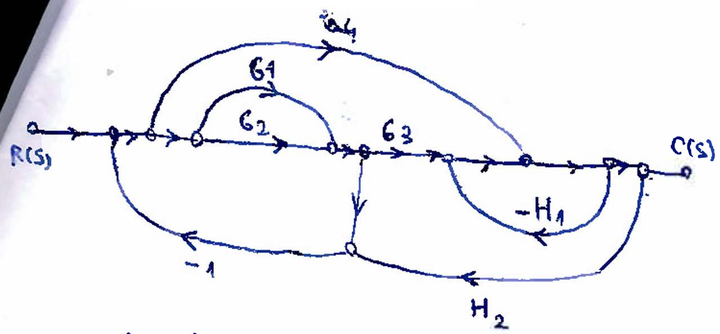
2.1. Determineu totes les equacions diferencials d'aquest sistema o alternativament el diagrama de blocs elementals amb totes les variables que intervenen en el sistema.

2.2. Determineu la funció de transferència dels desplaçament vertical de la massa X(s) enfront del parell $T_{K1}(s)$ generat per la molla de torsió, ja sigui utilitzant les equacions diferencials o bé simplificant el diagrama de blocs elementals de l'apartat 2.1.

3. ***(3 Punts)*** *El model dinàmic d'un sistema mecànic de rotació esta donat per les equacions següents:*

$$I\frac{d^2q_1}{dt^2} + b_1\frac{dq_1}{dt} + MgL\,sin(q_1) + k\sqrt{(q_1 - q_2)} = 0$$

$$J\frac{d^2q_2}{dt^2} + b_2\frac{dq_2}{dt} - k\sqrt{(q_1 - q_2)} = u$$



1

Camins directes:

$P_1 = G_2G_3$

$P_2 = G_1G_3$

$P_3 = G_4$

Llaços:

$L_1 = -G_4H_2$

$L_2 = -G_1G_3H_2$

$L_3 = -H_1$

$L_4 = -G_1$

$L_5 = -G_2$

$L_6 = -G_2G_3H_2$

Llaços disjunts 2 a 2

$L_3L_4 = H_1G_1$

$L_3L_5 = H_1G_2$

3 a 3

No n'hi ha

cofactor

$\Delta_{P_1} = 1$

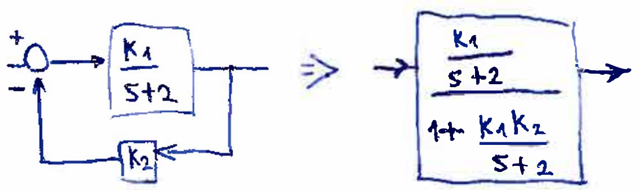
$\Delta_{P_2} = 1$

$\Delta_{P_3} = 1$

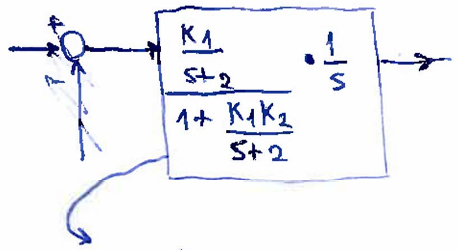
toquen tots els camins

$$\boxed{\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{G_2G_3 + G_1G_3 + G_4}{1 + G_4H_2 + G_1G_3H_2 + H_1 + G_1 + G_2 + G_2G_3H_2 + H_1G_1 + H_1G_2}}$$

5)



$\frac{9'75}{1}$



$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{K_1}{s+2+K_1K_2}\cdot\frac{1}{s} = \frac{K_1}{s^2+2s+K_1K_2s} = \left[\frac{K_1}{s^2+(2+K_1K_2)s} = \frac{K\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}\right]$$

sistema de 2n ordre SUBESMORTEIT $0<\xi<1$

sobrepic 5%.

$$\begin{cases} \boxed{K_1 = K\omega_n^2} \ (1) \\ 2+K_1K_2 = 2\xi\omega_n \end{cases}$$

- $t_{stab} = 4s$ criteri per defecte del $4\tau \rightarrow t_{est}(2\%) = 4\tau = \frac{4}{\xi\omega_n} = 4 \rightarrow \frac{1}{\xi\omega_n} = 1 \rightarrow \frac{2}{2+K_1K_2} = 2 \rightarrow \boxed{2+K_1K_2 = 1}$ (2)

$\xi\omega_n = \frac{1+K_1K_2}{2} = \frac{2+K_1K_2}{2}$

AQUÍ

- sobrepic 5%

$$0'05 = e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \rightarrow \ln 0'05 = \frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \rightarrow 1-\xi^2 = \left(\frac{-\xi\pi}{\ln 0'05}\right)^2 \rightarrow 1-\xi^2 = \frac{\xi^2\pi^2}{(\ln 0'05)^2} \rightarrow 1 = \xi^2\left(1+\frac{\pi^2}{(\ln 0'05)^2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \xi = 0'69011 \xrightarrow{2+K_1K_2 = 2\xi\omega_n} \boxed{2+K_1K_2 = 1'38021\,\omega_n} \ (3)$$

RESOLT AL FULL 2

$k_2 = 1$

$k_1 k_2 = 1'38021\,\omega_m$ $\rightarrow 1 = 1'38021\,\omega_m \rightarrow \omega_m = 0'72453$

$k_1 = k\omega_m^2 \rightarrow \boxed{K_1 = 0'52494\,K} \xrightarrow{(1)} K_1 K_2 = -1 \rightarrow 0'52494K\,K_2 = -1 \rightarrow \boxed{K_2 = -1'90498\,K}$

expressions generals en funció de K

$K_2 = 0\,!$

2)

depen si $\bar{x}_1 = 0$ o 180

$$\begin{pmatrix} \Delta\dot{\bar{x}}_1 \\ \Delta\dot{\bar{x}}_2 \\ \Delta\dot{\bar{x}}_3 \\ \Delta\dot{\bar{x}}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \pm\frac{MgL}{I} & -\frac{1}{I}b_1 & \cancel{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & 0 & -\frac{b_2}{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\bar{x}_1 \\ \Delta\bar{x}_2 \\ \Delta\bar{x}_3 \\ \Delta\bar{x}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/J \end{pmatrix} \Delta u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{x}_1 \\ \Delta\bar{x}_2 \\ \Delta\bar{x}_3 \\ \Delta\bar{x}_4 \end{bmatrix}$$

0,5 / 0,75

3.4. $G(s) = \frac{\Delta Q_1(s)}{\Delta U(s)} = \frac{\Delta X_1(s)}{\Delta U(s)}$

$x_2 = \dot{x}_1 = s x_1$

$\dot{x}_2 = \ddot{x}_1 = s^2 x_1$

$$\begin{cases} I\Delta\dot{x}_2 = [-b_1\Delta x_2 \pm MgL\Delta\bar{x}_1] \rightarrow s^2 I \Delta x_1 = -b_1 s \Delta\bar{x}_1 \pm MgL\Delta\bar{x}_1 \\ J\Delta\dot{x}_4 = [-b_2\Delta\bar{x}_4 + \Delta U] \rightarrow \Delta U = J\cdot s^2\Delta\bar{x}_3 + b_2 s\Delta\bar{x}_3 \rightarrow \boxed{\frac{1}{Js^2+b_2 s} = \frac{\Delta Q_1}{\Delta U}} \end{cases}$$

si jo sé que $\Delta\bar{x}_3 = \Delta\bar{x}_1$

$\theta_2 = \theta_1$ condició equilibri

No potser!! E.E amb 4 variables ⇓ ordre 4 per la FiT

0/0,5

3.5. $b_2 = 0$ $b_1 = 0$ $b_0 = 1$

$a_3 = 0$ $a_2 = J$ $a_1 = b_2$ $a_0 = 0$

$$\begin{pmatrix} \Delta\dot{\bar{x}}_1 \\ \Delta\dot{\bar{x}}_2 \\ \Delta\dot{\bar{x}}_3 \\ \Delta\dot{\bar{x}}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b_2 & -J & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\bar{x}_1 \\ \Delta\bar{x}_2 \\ \Delta\bar{x}_3 \\ \Delta\bar{x}_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Delta u$$

$$y = [1, 0, 0, 0] \begin{pmatrix} \Delta\bar{x}_1 \\ \Delta\bar{x}_2 \\ \Delta\bar{x}_3 \\ \Delta\bar{x}_4 \end{pmatrix}$$

0 / 0,25

41

2.1.)

$$\begin{cases} J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + \cancel{b_m \frac{d\theta_m}{dt}} = T_M = K i_a & \text{NO} \\ L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a & \checkmark \ \text{SI} \\ K_2 X_1 + B_c \frac{dX_1}{dt} + \cancel{M \frac{d^2 X_1}{dt^2}} = 0 & \text{NO} \\ e_b = K_b \frac{d\theta_m}{dt} & \checkmark \\ J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + \theta_m K_1 - \theta_1 K_1 - T_m + B_m \frac{d\theta_m}{dt} - \cancel{B_m \frac{d\theta_1}{dt}} = 0 & \\ J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \theta_1 K_1 - \cancel{\theta_m K_1} - T_{K1} - B_m \frac{d\theta_m}{dt} \cancel{+ B_m \frac{d\theta_1}{dt}} = 0 & \\ X_1 = P \cdot \theta_1 \end{cases}$$

?

0,5 / 2

~~$S^2 J_1 \theta_1 + \theta_1 K_1 - \theta_m K_1 - T_{K1} - S B_m \theta_m$~~

$0 = S^2 \theta_m J_m + \theta_m K_1 - \theta_1 K_1 - T_m + S B_m \theta_m - S B$

$0 = (S^2 J_m + K_1 + S B_m)\theta_m - \theta_1 K_1 - T_m - S B_m$

$$\theta_m = \frac{\theta_1 K_1 + T_m + S B_m \theta_1}{S^2 J_m + K_1 + S B_m}$$

2.2)

$T_{K1} = J_1 \theta_1 S^2 + \theta_1 K_1 - \theta_m K_1 - B_m S \theta_m + B_m S \theta$

$\theta_1 \leftarrow \frac{X_1}{P}$, $\theta_1 \leftarrow \frac{X_1}{P}$

$$\boxed{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{X_1(S)}{T_{K1}(S)} = \frac{1}{\frac{J_1}{P} S^2 + \frac{K_1}{P} - \left(\frac{\frac{1}{P} K_1 + T_m + S B_m \frac{1}{P}}{S^2 J_m + K_1 + S B_m}\right) K_1 - B_m S \left(\frac{\frac{1}{P} K_1 + T_m + S B_m \frac{1}{P}}{S^2 J_m + K_1 + S B_m}\right) + \frac{B_m S}{P}}$$

Falta simplificar

?

coherent pero incorrecte

0,5 / 1

1/2

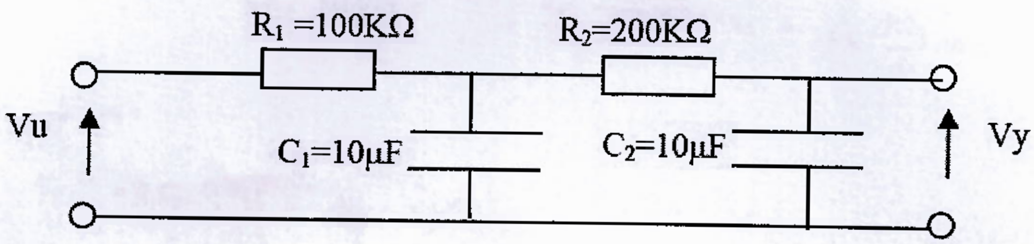
EXAMEN DE CONTROL AUTOMÀTIC

Grau en Enginyeria en Tecnologies Aeroespacials
Grau en Enginyeria en Vehicles Aeroespacials
Divendres 13 de Novembre de 2020 a les 11:00 hores

La durada total de l'examen és de 2:30 hores i l ... sobre 10.

N

1. (... ca i la representació
i ... nsadors C_1 i C_2) del
c



Nota: Forma canònica controlable

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 & b_1 - b_n a_1 & b_2 - b_n a_2 & \cdots & b_{n-2} - b_n a_{n-2} & b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} [x] + b_n u$$

EXERCICI 1/

$$\begin{cases} u = v_{C1} + v_{R1} \\ v_{C1} = v_{C2} + v_{R2} \\ v_{C2} = y \end{cases}$$

Equacions diferencials:

$$v_u = \frac{1}{C_1}\int i_{c1}\,dt + i_{R1}R_1 = v_{C1} + i_{R1}R_1 \quad ✓$$

$$v_y = \frac{1}{C_2}\int i_{c2}\,dt = v_{C2} \quad ✓$$

$$v_{C1} = \frac{1}{C_1}\int i_{c1}\,dt = i_{R2}R_2 + v_y \quad ✓$$

$$i_{c2} = C_2\frac{dv_{C2}}{dt} \qquad i_{c2} = i_{R2}$$

$$i_{c1} = C_1\frac{dv_{C1}}{dt} \qquad i_{c1} = i_{R1} + i_{c2}$$

$$C_1\frac{dv_{C1}}{dt} = i_{R1} + C_2\frac{dv_{C2}}{dt} \Rightarrow \boxed{i_{R1} = C_1\frac{dv_{C1}}{dt} - C_2\frac{dv_{C2}}{dt}}$$

Llavors tenim:

$$\left\{\begin{aligned} v_{C1} &= R_2C_1\cancel{\frac{dv_{C1}}{dt}} + v_{C2} \\ v_u &= v_{C1} + R_1C_1\frac{dv_{C1}}{dt} - R_1C_2\frac{dv_{C2}}{dt} \end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= R_2C_1\cancel{\frac{dx_1}{dt}} + x_2 \\ u &= x_1 + R_1C_1\frac{dx_1}{dt} - R_1C_2\frac{dx_2}{dt} \end{aligned}\right. \qquad \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1 - x_2}{R_2C_1} = \cancel{\frac{1}{R_2C_1}x_1 - \frac{1}{R_2C_1}x_2}$$

NOO!

$$\frac{dx_2}{dt} = \ldots \quad ?$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_s \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

→ Busquem FDT.

$sX_1(s) =$

$sX_2(s) =$ → Seguir a l'altre full

$$\frac{U(s)}{X_2(s)}$$

Exercici 1.

$u = u_{C1} + u_{R1} = u_{C1} + i_{R1} R_1$

$u_{C1} = u_{C2} + u_{R2} = u_{C2} + i_{R2} R_2$

$(u_{C2} = \ldots)$

$i_{C1} = i_{R1} + i_{C2} \qquad i_{C2} = i_{R2}$

$C_1 \frac{du_{C1}}{dt} - C_2 \frac{du_{C2}}{dt} = i_{R1}$

$$\left.\begin{array}{l} u = u_{C1} + R_1 C_1 \frac{du_{C1}}{dt} - R_1 C_2 \frac{du_{C2}}{dt} \\ u_{C1} = u_{C2} + R_2 C_2 \frac{du_{C2}}{dt} \end{array}\right\}$$

$$\frac{du_{C2}}{dt} = \frac{u_{C1} - u_{C2}}{R_2 C_2}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \qquad u = u_{C1} + R_1 C_1 \frac{du_{C1}}{dt} - R_1 C_2 \frac{u_{C1} - u_{C2}}{R_2 C_2}$$

$$\begin{cases} \frac{du_{C1}}{dt} = \left(u - u_{C1} + \frac{R_1 \cancel{C_2}}{R_2 \cancel{C_2}} u_{C1} - \frac{R_1 \cancel{C_2}}{R_2 \cancel{C_2}} u_{C2} \right) \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{du_{C2}}{dt} = (u_{C1} - u_{C2}) \frac{1}{R_2 C_2} \end{cases}$$

S1

Interna física

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{x}_1 = \left(u - x_1 + \frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2 \right) \\ \dot{x}_2 = (x_1 - x_2) \frac{1}{2} \end{array}$$

1/1

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \qquad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$s X_1(s) = -1/2 \, X_1(s) - 1/2 \, X_2(s) + U(s)$$

$$s X_2(s) = 1/2 \, X_1(s) - 1/2 \, X_2(s) \Rightarrow X_1 = (1 + 2s) X_2$$

$$(s + 2s^2) X_2 = -\tfrac{1}{2} (1 + 2s) X_2 - 1/2 \, X_2(s) + U(s)$$

$$X_2 \left(s + 2s^2 + \frac{1}{2} + s + \frac{1}{2} \right) = U(s) \longrightarrow \frac{U(s)}{X_2(s)} = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{2s^2 + 2s + 1}{1}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

0/1

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} (x) + u$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

$\frac{1}{3} + \frac{2,25}{3} + \frac{0,25}{1} + \frac{0,5}{1}$

EXAMEN DE CONTROL AUTOMÀTIC

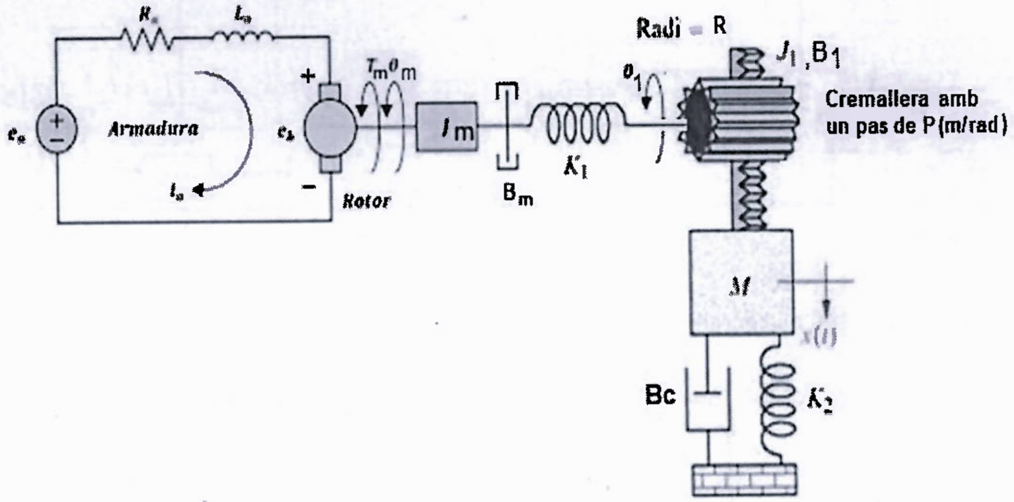
Grau en Enginyeria en Tecnologies Aeroespacials
Grau en Enginyeria en Vehicles Aeroespacials

Divendres 13 de Novembre de 2020 a les 11:00 hores

La durada total de l'examen és de 2:30 hores i la puntuació és sobre 10.

Nom i Co

2. **(3 Punts** ... olar la posició vertical x ... a amb un angle θ_1 i que t ... l gràcies a una cremaller ... el qual té un moment d'inèrcia J_1 i un fregament B_1. El motor de corrent continua té els paràmetres habituals K_b, K_m, J_m i B_m. Entre l'eix del motor θ_m i l'eix del cilindre dentat θ_1 hi ha una molla de torsió amb constant K_1. La massa M està encaixada a la cremallera i en la seva part inferior hi ha una molla de constant K_2 i un fregament B_c.



2.1. Determineu totes les equacions diferencials d'aquest sistema o alternativament el diagrama de blocs elementals amb totes les variables que intervenen en el sistema.

2.2. Determineu la funció de transferència dels desplaçament vertical de la massa X(s) enfront del parell $T_{K1}(s)$ generat per la molla de torsió, ja sigui utilitzant les equacions diferencials o bé simplificant el diagrama de blocs elementals de l'apartat 2.1.

3. **(3 Punts)** El model dinàmic d'un sistema mecànic de rotació està donat per les equacions següents:

$$I\frac{d^2q_1}{dt^2} + b_1\frac{dq_1}{dt} + MgL\,sin(q_1) + k\sqrt{(q_1 - q_2)} = 0$$

$$J\frac{d^2q_2}{dt^2} + b_2\frac{dq_2}{dt} - k\sqrt{(q_1 - q_2)} = u$$

...ràctica 2. Motor.

2.1 / Totes les equacions diferencials del sistema.

$$L_a \frac{di_A}{dt} + R_a i_a + k_b \frac{d\theta_m}{dt} = e_a \quad \checkmark$$

$$b\left(\frac{d\theta_m}{dt} - \cancel{\frac{d\theta_1}{dt}}\right) + k_1(\theta_m - \theta_1) = J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + B_1 \frac{d\theta_1}{dt}$$

$$k_1(\theta_m - \theta_1) + J_m \frac{d^2\theta_m}{dt^2} + b\left(\frac{d\theta_m}{dt} - \cancel{\frac{d\theta_1}{dt}}\right) = T_m = K i_A$$

$$\cancel{P}\theta_1 = x$$

?

$$M\ddot{x} + B_c\dot{x} + k_2 x = \cancel{J\theta_1 + B_1\theta_1}$$

1/2

$$\cancel{J_1 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = B_1\dot{\theta}_1}$$

$$\boxed{\frac{1}{3}}$$

2.2/ És qüestió d'aplicar la transformada de Laplace i substituir a les equacions rellevants

$$F_T = \frac{X(s)}{T_{k_1}(s)}$$

$$Ms^2 X(s) + B_c s X(s) + k_2 X(s) = J_1 s^2 \theta_1(s) + B_1 s(\theta_1(s))$$

$$P\theta_1(s) = X(s)$$

$$bs\left(s\,\theta_m(s) - s\,\theta_1(s)\right) + k_1\left(\theta_m(s) - \theta_1(s)\right) = J_1 s^2 \theta_m(s) + B_1 s\,\theta_1(s)$$

$$k_1\left(\theta_m(s) - \theta_1(s)\right) + J_m s^2 \theta_m(s) + bs\left(\theta_m(s) - \theta_1(s)\right) = K I_a(s)$$

$$T_{k_1}(s) = k_1\left(\theta_m(s) - \frac{X(s)}{P}\right) \longrightarrow \frac{X(s)}{P} + T_{k_1} = k_1\theta_m \rightarrow \theta_m = \frac{X(s)}{P} + T_{k_1}$$

~~...~~

$$Ms^2 X(s) + B_c s X(s) + k_2 X(s) = \frac{b}{T_{k_1}} T_{k_1}(s) + k_1 T_{k_1}(s)$$

$$X(s)\left[Ms^2 + B_c s + k_2\right] = \left(\frac{b}{k_1} + k\right) T_{k_1} \longrightarrow \frac{X(s)}{T_{k_1}(s)} = \frac{\frac{b}{k_1} + k_1}{Ms^2 + Bc_2 + k_2}$$

NO

0/1

$$bs\left(\cancel{\frac{X(s)}{P}} + T_{k_1} - \cancel{\frac{X(s)}{P}}\right) + T_{k_1} = J_1 s^2 \frac{X(s)}{P} + B_1 s \frac{X(s)}{P}$$

$$(1 + bs) T_{k_1} = X(s)\left[J_1 s^2 + B_1 s\right]$$

$$\cancel{\frac{X(s)}{T_{k_1}(s)} = \frac{1 + bs}{J_1 s^2 + B_1 s}}$$

xercici 3// sistema mecànic de rotació

$\dfrac{2{,}25}{3}$

$$\begin{cases} I\dfrac{d^2q_1}{dt^2} + b_1\dfrac{dq_1}{dt} + MgL\sin(q_1) + k\sqrt{q_1-q_2} = 0 \\ J\dfrac{d^2q_2}{dt^2} + b_2\dfrac{dq_2}{dt} - k\sqrt{q_1-q_2} = u \end{cases}$$

3.1// SISTEMA NO LINEAL

$x_1 = q_1 \to x_2 = \dot{q}_1$
$x_3 = q_2 \to x_4 = \dot{q}_2$

$$\begin{cases} I\ddot{x}_1 \; (\dot{x}_2) + b_1\dot{x}_1 \; (x_2) + MgL\sin x_1 + k\sqrt{x_1 - x_3} = 0 \\ J\cancel{\ddot{x}_2} \; (\dot{x}_4) + b_2\cancel{\dot{x}_2} \; (x_4) - k\sqrt{x_1 - x_3} = u \end{cases}$$

$0/0{,}0$

3.2// Punt d'equilibri. $\ddot{\bar{x}}_1 = 0$, $\dot{\bar{x}}_1 = 0$, $\ddot{\bar{x}}_2 = 0$, $\dot{\bar{x}}_2 = 0$

$$MgL\sin\bar{q}_1 + k\sqrt{\bar{q}_1 - \bar{q}_2} = 0$$

$0{,}5$

$$k^2(\bar{q}_1 - \bar{q}_2) = MgL\sin^2\bar{q}_1$$

$$\bar{u} = MgL\sin\bar{q}_1 \qquad \bar{q}_2 = -\frac{MgL\sin^2\bar{q}_1}{k^2} + \bar{q}_1$$

3.3// Linealitzem: derivar respecte cada variable i igualar a zero

$$\begin{cases} I\Delta\ddot{\bar{x}}_1 + b_1\Delta\dot{\bar{x}}_1 + MgL\cos\bar{q}_1\,\Delta\bar{x}_1 + \dfrac{k}{2\sqrt{\bar{q}_1-\bar{q}_2}}\Delta\bar{x}_1 - \dfrac{k}{2\sqrt{\bar{q}_1-\bar{q}_2}}\Delta\bar{x}_2 = 0 \\ J\Delta\ddot{\bar{x}}_2 + b_2\Delta\dot{\bar{x}}_2 + \dfrac{k}{2\sqrt{\bar{q}_1-\bar{q}_2}}\Delta\bar{x}_1 - \dfrac{k}{2\sqrt{\bar{q}_1-\bar{q}_2}} - \Delta u = 0 \end{cases}$$

$$\Delta\ddot{x}_1 = \frac{1}{I}\left(-b_1\Delta\dot{\bar{x}}_1 + MgL\cos\bar{q}_1\,\Delta\bar{x}_1 + \frac{k}{2\sqrt{\bar{q}_1-\bar{q}_2}}\Delta\bar{x}_1 + \frac{k}{2\sqrt{\bar{q}_1-\bar{q}_2}}\Delta\bar{x}_2\right)$$

$$\Delta\ddot{x}_2 = \frac{1}{J}\left(-b_2\Delta\dot{\bar{x}}_2 - \frac{k}{2\sqrt{\bar{q}_1-\bar{q}_2}}\Delta\bar{x}_1 + \frac{k}{2\sqrt{\bar{q}_1-\bar{q}_2}}\Delta\bar{x}_2 + \Delta u\right)$$

~~$\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix}\Delta\dot{x}_1\\ \Delta\dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x_1\end{pmatrix}$~~

NOTA: $\bar{q}_2(\bar{q}_1) = \bar{q}_2$, segons la fórmula de sobre.

– El sistema obtingut és:

$$\begin{cases} \Delta\ddot{q}_1 = \frac{1}{I}\left(-b_1 \Delta\dot{x}_{q_1} - \left(Mg L\cos\bar{q}_1 + \frac{K}{2\sqrt{\bar{q}_1-\bar{q}_2}}\right)\Delta x_{1,q_1} + \frac{K}{2\sqrt{\bar{q}_1-\bar{q}_2}}\Delta x_{2,q_2}\right) \\ \Delta\ddot{q}_2 = \frac{1}{J}\left(-b_2 \Delta\dot{x}_{2,q_2} - \frac{K}{2\sqrt{\bar{q}_1-\bar{q}_2}}\Delta x_{1,q_1} + \frac{K}{2\sqrt{\bar{q}_1-\bar{q}_2}}\Delta x_{2,q_2} - \Delta u\right) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \\ \Delta\dot{x}_3 \\ \Delta\dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ n_1 & n_2 & n_3 & 0 \\ n_4 & n_5 & 0 & n_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cancel{1} \ -1/J \end{pmatrix} \Delta u$$

$$n_1 = -\frac{1}{I}\left(MgL\cos\bar{q}_1 + \frac{K}{2\sqrt{\bar{q}_1-\bar{q}_2}}\right) \quad n_2 = \frac{K}{I\,2\sqrt{\bar{q}_1-\bar{q}_2}} \quad n_3 = -\frac{b_1}{I_1}$$

$$n_4 = \cancel{+}\frac{1}{J}\left(\frac{K}{2\sqrt{\bar{q}_1-\bar{q}_2}}\right) \quad n_5 = \frac{-K}{J\,2\sqrt{\bar{q}_1-\bar{q}_2}} \quad n_6 = \frac{-b_2}{J}$$

0,375

3.4. Funció de transferència

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix}$$

$$s\Delta X_1 = \Delta X_3 \qquad s\Delta X_3 = s^2\Delta X_1 = n_1\Delta X_1 + n_2\Delta X_2 + n_3\Delta X_3$$

$$s\Delta X_2 = \Delta X_4 \qquad s\Delta X_4 = s^2\Delta X_2 = n_4\Delta X_1 + n_5\Delta X_2 + n_6\Delta X_4 - \Delta U$$

on les noves funcions són $\Delta X_n = \Delta X_n(s)$. Volem que tot depengui de ΔX_1 i ΔU.

$$(s^2 - n_1)\Delta X_1 = n_2\Delta X_2 + n_3\Delta X_3 = n_2\Delta X_2 + n_3 s\Delta X_1$$

$$\boxed{(s^2 - n_1 - n_3 s)\Delta X_1 = n_2\Delta X_2}$$

0,25 / 0,375

$$(s^2 - n_5)\Delta X_2 = n_4\Delta X_1 + n_6 s\Delta X_2 - \Delta U$$

$$\boxed{(s^2 - n_5 - n_6 s)\Delta X_2 = n_4\Delta X_1 - \Delta u}$$

$$(s^2 - n_1 - n_3 s)\Delta X_1 = n_2\,\frac{n_4\Delta X_1 - \Delta u}{s^2 - n_6 s - n_5}$$

$$\left(s^2 - n_3 s - n_1 - \frac{n_2 n_4}{s^2 - n_6 s - n_5}\right)\Delta X_1 = \frac{-n_2}{s^2 - n_6 s + n_5}\Delta u$$

$$\boxed{\frac{\Delta Q_1}{\Delta u} = \frac{-n_2/(s^2 - n_6 s - n_5)}{s^2 - n_3 s - n_1 - \frac{n_2 n_4}{s^2 - n_6 s - n_5}}}$$

¿?

... una expressió del següent estil.

$$\frac{\Delta Q_1(s)}{\Delta U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Llavors, segons la forma canònica controlable, les equacions en espai d'estat són

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \\ \Delta \dot{x}_3 \\ \Delta \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Delta u$$

0,25 / 0,5

$$y = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & 0 \end{pmatrix} (x)$$

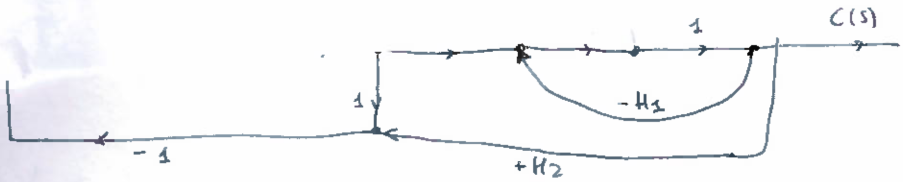
?!

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta u} = \frac{-n_2}{-n_2 n_4 + (s^2 - n_6 s - n_5)\left[s^2 - n_3 s - n_1\right]} =$$

$$= \frac{-n_2}{-n_2 n_4 + s^4 - n_3 s^3 - n_1 s^2 - n_6 s^3 + n_6 n_3 s^2 + n_1 n_6 s - n_5 s^2 + n_3 n_5 s + n_1 n_5} =$$

$$= \frac{-n_2 \longrightarrow b_0}{s^4 + s^3 \underbrace{(-n_3 - n_6)}_{a_3} + s^2 \underbrace{(-n_1 + n_6 n_3 - n_5)}_{a_2} + s \underbrace{(n_1 n_6 + n_3 n_5)}_{a_1} + \underbrace{(n_1 n_5 - n_2 n_4)}_{a_0}}$$

Així doncs, cal substituir aquests valors de a i ~~de~~ b pels valors trobats.



0,25 / 1

Camins directes:

$P_1 = G_1 G_3$

$P_2 = G_2 G_5$

$P_3 = G_4$

Llaços

$L_1 = -G_1 G_2$ NO!

$L_2 = -G_2 G_3 G_4$

$L_3 = -G_4 H_1$

$L_4 = -G_2 G_3 H_2$

$L_5 = -G_2$

Llaços disjunts (no tenen res en comú)

$L_1 L_3,\ L_3 L_4,\ L_4 L_5$

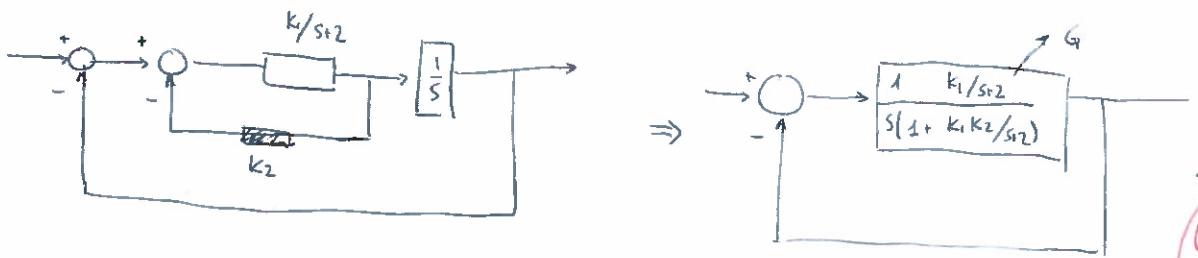
Cofactors Δ: els camins toquen tots els llaços

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{1 - L_1 L_2 - L_3 - L_4 - L_5 - L_1 L_3 - L_3 L_4 - L_4 L_5}$$

↳ només cal substituir aquests valors però a l'esquerra.

$$G = \frac{K_1}{s(s+2)\left(1 + \frac{K_1 K_2}{s+2}\right)}$$

Exercici 5/



0,5 / 1

⇒ 

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G}{1+G} = \frac{1}{1 - 1/G}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{s(s+2)\left(1 + \frac{K_1 K_2}{s+2}\right)}{K_1}} = \frac{K_1}{K_1 - (s^2 + 2s)\left(1 + \frac{K_1 K_2}{s+2}\right)} =$$

$$= \frac{K_1}{K_1 - (s^2 + 2s + K_1 K_2 s)} = \frac{K_1}{-s^2 + (2 + K_1 K_2)s + K_1} = \frac{-K_1}{s^2 + (2 + K_1 K_2)s - K_1}$$

$4 = t_s = 4\tau$ (criteri del 2% per defecte)

$$M_p = 0.005 = \frac{C_{pic} - \text{permanent}}{\text{permanent}}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{(\ln M_p)^2}{\pi^2 + (\ln M_p)^2}} = 0,69 \quad 0,25$$

$$4 = \frac{4}{\xi \omega_N} \rightarrow \omega_N = \quad \omega_N = 1/\xi = 1,45$$

$-(2 + K_1 K_2) = 2 \xi \omega_N \qquad K_2 = -1,9$

$-K_1 = \omega_N^2 \rightarrow K_1 = -2,1$

0,25

no podem fer l'ajuda error de càlcul però aquest és el procediment a seguir.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

2/2

Revisat

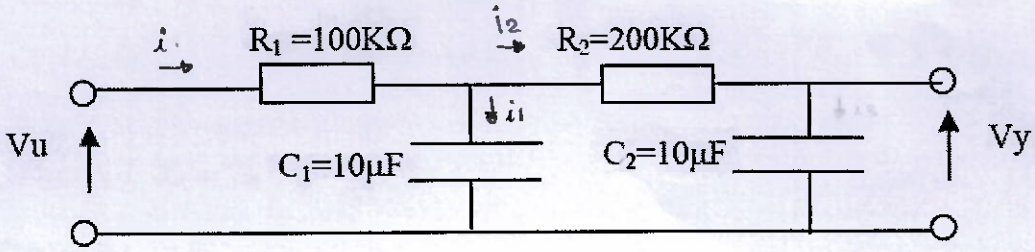
EXAMEN DE CONTROL AUTOMÀTIC

Grau en Enginyeria en Tecnologies Aeroespacials
Grau en Enginyeria en Vehicles Aeroespacials
Divendres 13 de Novembre de 2020 a les 11:00 hores

La durada total de l'examen és de 2:30 hores i la puntuació és sobre 10.

Nom i

1. **(2 Pu** ... a representació interna ... ors C_1 i C_2) del circui



Nota: Forma canònica controlable

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & & -a_{n-2} & -a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y=\begin{bmatrix}b_0-b_na_0 & b_1-b_na_1 & b_2-b_na_2 & \cdots & b_{n-2}-b_na_{n-2} & b_{n-1}-b_na_{n-1}\end{bmatrix}[x]+b_nu$$

CA

P1

EE canònic

EE físic

Variables estat V_{C1} V_{C2}

E Temporals:

$V_u = V_{R1} + V_{C1}$ $\quad$ $V_u = iR_1 + \frac{1}{C_1}\int i\,dt$ $\quad$ (1) $V_u = IR_1 + \frac{1}{C_1 s} I_1$

$V_{C1} = V_{R2} + V_{C2}$ $\quad$ $\frac{1}{C_1}\int i\,dt = i_2 R_2 + \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt$ $\quad \xrightarrow{TL}$ (2) $\frac{1}{C_1 s} I_1 = I_2 R_2 + \frac{1}{C_2 s} I_2$

$V_{C2} = V_y \rightarrow \frac{1}{C_2}\int i_2\,dt = V_y$ $\quad$ (3) $\frac{1}{C_2 s} I_2 = V_y$

$i = i_1 + i_2$ $\quad$ $i = i_1 + i_2$ $\quad$ (4) $I = I_1 + I_2$

(1) $V_u = R_1(I_1 + I_2) + \frac{1}{C_1 s} I_1$

(3) $I_2 = V_y C_2 s$

(2) $I_1 = I_2 R_2 C_1 s + \frac{C_1}{C_2} I_2$

(3) → (2) → $I_1 = V_y R_2 C_1 C_2 s^2 + V_y C_1 s$

(2)/(3) → (1)

$$V_u = R_1\left(V_y R_2 C_1 C_2 s^2 + V_y C_1 s + V_y C_2 s\right) + \frac{1}{C_1 s}\left(V_y R_2 C_1 C_2 s^2 + V_y C_1 s\right)$$

$$V_u = V_y R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + V_y R_1 C_1 s + V_y R_1 C_2 s + V_y R_2 C_2 s + V_y$$

$$V_u = V_y\left(R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + R_1 C_1 s + R_1 C_2 s + R_2 C_2 s + 1\right)$$

$$\frac{V_y}{V_u} = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)s + 1} \quad // \rightarrow \text{FDT}$$

Forma canònica:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{R_1R_2C_1C_2} & -\frac{R_1C_1+R_2C_2+R_1C_2}{R_1R_2C_1C_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} U(t)$$

$$y = \begin{pmatrix}\frac{1}{R_1R_2C_1C_2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

√ 1/1

Variables d'estat:

$x_1 = V_{C1}$ $\qquad \dot{x}_1 = \dot{V}_{C1}$

$x_2 = V_{C2}$ $\qquad \dot{x}_2 = \dot{V}_{C2}$

(*)

$V_{C1} = \frac{1}{C_1}\int i_1 dt$ $\qquad V_{C2} = \frac{1}{C_2}\int i_2 dt$

$\frac{dV_{C1}}{dt} = \frac{i_1}{C_1}$ $\qquad \frac{dV_{C2}}{dt} = \frac{i_2}{C_2}$

$i_1 = \dot{V}_{C1}C_1$ $\qquad i_2 = \dot{V}_{C2}C_2$

Substituint a les E Temporals:

$$\left.\begin{aligned} V_U &= (\dot{V}_{C1}C_1 + \dot{V}_{C2}C_2)R_1 + V_{C1}\\ V_{C1} &= \dot{V}_{C2}C_2R_2 + V_{C2}\end{aligned}\right\} \left[\begin{aligned} V_U &= \dot{x}_1C_1R_1 + \dot{x}_2C_2R_1 + x_1\\ x_1 &= \dot{x}_2C_2R_2 + x_2\end{aligned}\right]$$

obtenim $\dot{x}_2 = \frac{1}{C_2R_2}x_1 - \frac{1}{C_2R_2}x_2$ //

$$C_1R_1\dot{x}_1 = -\dot{x}_2C_2R_1 - x_1 + V_U$$

$$\dot{x}_1 = -\dot{x}_2\frac{C_2}{C_1} - \frac{1}{C_1R_1}x_1 + \frac{1}{C_1R_1}V_U$$

$$\dot{x}_1 = -\left(\frac{1}{C_2R_2}x_1 - \frac{1}{C_2R_2}x_2\right)\frac{C_2}{C_1} - \frac{1}{C_1R_1}x_1 + \frac{1}{C_1R_1}V_U$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{C_1R_2}x_1 + \frac{1}{C_1R_2}x_2 - \frac{1}{C_1R_1}x_1 + \frac{1}{C_1R_1}V_U$$

$$\dot{x}_1 = -\left(\frac{1}{C_1R_2} + \frac{1}{C_1R_1}\right)x_1 + \frac{1}{C_1R_2}x_2 + \frac{1}{C_1R_1}V_U$$

√ 1/1

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\left(\frac{1}{C_1R_2}+\frac{1}{C_1R_1}\right) & \frac{1}{C_1R_2}\\ \frac{1}{C_2R_2} & -\frac{1}{C_2R_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{C_1R_1}\\ 0\end{pmatrix}V_U \qquad y = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

$\frac{1,5}{3} + \frac{2,75}{3} + \frac{0,75}{1} + \frac{0,75}{1}$

Revisat

EXAMEN DE CONTROL AUTOMÀTIC

Grau en Enginyeria en Tecnologies Aeroespacials
Grau en Enginyeria en Vehicles Aeroespacials

Divendres 13 de Novembre de 2020 a les 11:00 hores

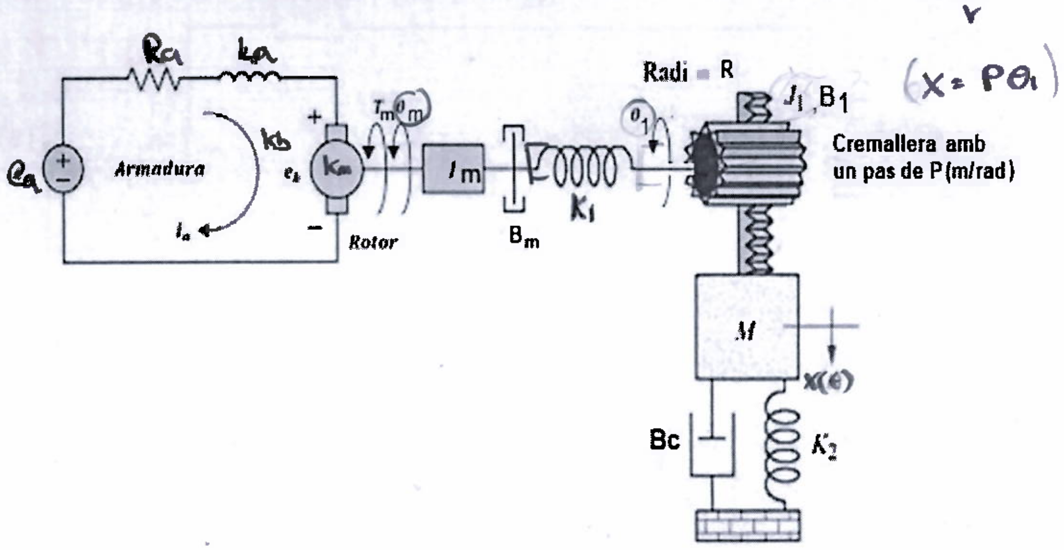
La d...

Nom i C...

2. **(3 Punts** ... rolar la posició vertical x ... a amb un angle θ_1 i que t... al gràcies a una cremallera dentada que es desplaça P metres per cada radian del cilindre, el qual té un moment d'inèrcia J_1 i un fregament B_1. El motor de corrent continua té els paràmetres habituals K_b, K_m, J_m i B_m. Entre l'eix del motor θ_m i l'eix del cilindre dentat θ_1 hi ha una molla de torsió amb constant K_1. La massa M està encaixada a la cremallera i en la seva part inferior hi ha una molla de constant K_2 i un fregament B_c.

$P \frac{m}{r}$

$(x = P\theta_1)$



2.1. Determineu totes les equacions diferencials d'aquest sistema o alternativament el diagrama de blocs elementals amb totes les variables que intervenen en el sistema.

2.2. Determineu la funció de transferència dels desplaçament vertical de la massa X(s) enfront del parell $T_{K1}(s)$ generat per la molla de torsió, ja sigui utilitzant les equacions diferencials o bé simplificant el diagrama de blocs elementals de l'apartat 2.1.

3. **(3 Punts)** El model dinàmic d'un sistema mecànic de rotació esta donat per les equacions següents:

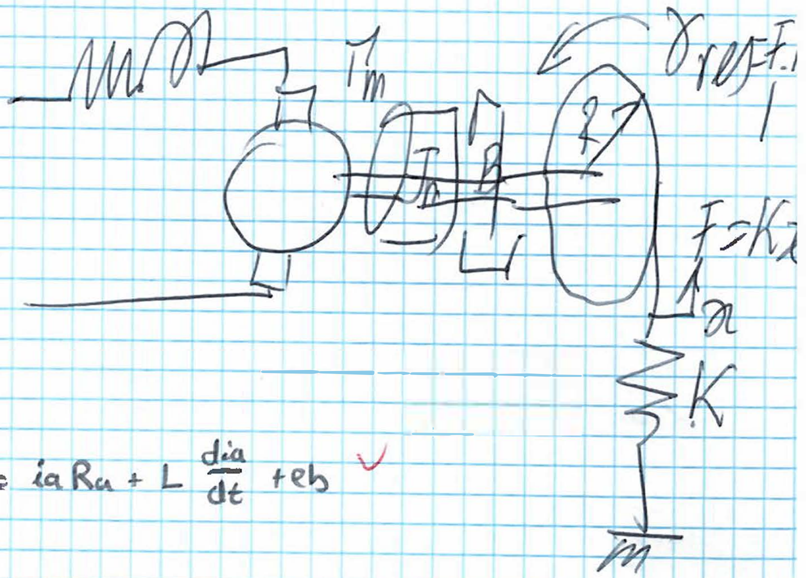
$$I\frac{d^2q_1}{dt^2} + b_1\frac{dq_1}{dt} + MgL\,sin(q_1) + k\sqrt{(q_1 - q_2)} = 0$$

$$J\frac{d^2q_2}{dt^2} + b_2\frac{dq_2}{dt} - k\sqrt{(q_1 - q_2)} = u$$

CA

P2

2.1



E Temporals:

(A) $e_a = V_{Ra} + V_{La} + e_b \rightarrow e_a = i_a R_a + L \frac{di_a}{dt} + e_b$ ✓

(B) $e_b = K_b \dot{\theta}_m$ ✓

(C) $T_m = K_m i_a$ ✓

(D) $T_m = J_m \ddot{\theta}_m + B \dot{\theta}_m - K_1(\theta_m - \theta_1)$ ✓

(E) $J_1 \ddot{\theta}_1 = -B_1 \dot{\theta}_1 + K_1(\theta_m - \theta_1)$ NO $+ F_{res}$

1/2

(F) $x = P\theta_1$

(G) $M\ddot{x} = \cancel{-B_2\dot{x}} - K_2 x$ NO

2.2 FDT? $\frac{X}{T_{K_1}}$

Suposem $T_{K_1} = K_1(\theta_m - \theta_1)$

$\boxed{1/3}$

Equacions temporals:

$T_{K_1} = J_1\ddot{\theta}_1 + B_1\dot{\theta}_1 \xrightarrow{TL} T_{K_1} = J_1 s^2 \theta_1 + B_1 s \theta_1$

$x = P\theta_1 \qquad X = P\theta_1$

$M\ddot{x} = -B_2\dot{x} - K_2 x \qquad Ms^2 X = -B_2 s X - K_2 X$ → No necessària

$T_{K_1} = J_1 s^2 \frac{X}{P} + B_1 s \frac{X}{P}$

$T_{K_1} = \left(\frac{J_1 s^2}{P} + \frac{B_1 s}{P}\right) X$

molt simple

$$\boxed{\frac{X}{T_{K_1}} = \frac{1}{\frac{J_1}{P}s^2 + \frac{B_1}{P}s}}$$

incorrecte

$\cancel{0,5}$

1

CA

$\frac{9{,}75}{3}$

(P3) $I\ddot{q}_1 + b_1\dot{q}_1 + MgL\sin(q_1) + K\sqrt{q_1-q_2}$ ⊛ U = entrada

ET: $$I\frac{d^2q_1}{dt^2} + b_1\frac{d^2q_1}{dt} + MgL\sin(q_1) + K\sqrt{q_1-q_2} = 0$$

$$J\frac{d^2q_2}{dt^2} + b_2\frac{dq_s}{dt} - K\sqrt{q_1-q_2} = U$$

$$J\ddot{q}_2 + b_2\dot{q}_2 - K\sqrt{q-q_2} - U = 0$$

(3.1) V. estat? EE físic Sortida $[q_1\ q_2]$

Variables d'estat:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} x_1 = q_1 & & \dot{x}_1 = x_3 = \dot{q}_1 \\ x_2 = q_2 & & \dot{x}_2 = x_4 = \dot{q}_2 \\ x_3 = \dot{q}_1 & \rightarrow & \dot{x}_3 = \ddot{q}_1 \\ x_4 = \dot{q}_2 & & \dot{x}_4 = \ddot{q}_2 \end{array}}$$

$$I\dot{x}_3 + b_1x_3 + MgL\sin(x_1) + K\sqrt{x_1-x_2} = 0$$

$$J\dot{x}_4 + b_2x_4 - K\sqrt{x_1-x_2} - U = 0$$

Per tant:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{b_1}{I}x_3 - \frac{MgL}{I}\sin(x_1) - \frac{K}{I}\sqrt{x_1-x_2} \\ \dot{x}_4 &= -\frac{b_2}{J}x_4 + \frac{K}{J}\sqrt{x_1-x_2} + \frac{U}{J} \end{aligned}}$$

9,5

3.2 PE on $q_{1_0} = \bar{q}_1$

$\ddot{q}_{10} = 0$, $\ddot{q}_{20} = 0$, $\dot{q}_{10} = 0$, $\dot{q}_{20} = 0$, $q_{10} = \bar{q}_1$, U_0: ? , q_{20}: ?

Apliquem a les equacions

$$0 + 0 + MgL\sin(\bar{q}_1) + K\sqrt{\bar{q}_1 - q_{20}} = 0 \qquad (1)$$

$$0 + 0 - K\sqrt{\bar{q}_1 - q_{02}} = U_0 \longrightarrow U_0 = -K\sqrt{\bar{q}_1 - q_{02}}$$

(1) $K\sqrt{\bar{q}_1 - q_{02}} = -MgL\sin(\bar{q}_1)$

$$\sqrt{\bar{q}_1 - q_{02}} = -\frac{MgL\sin(\bar{q}_1)}{K}$$

$$\bar{q}_1 - q_{20} = \left(-\frac{MgL}{K}\right)^2 \sin^2(\bar{q}_1)$$

$$\boxed{q_{20} = \bar{q}_1 - \left(-\frac{MgL}{K}\sin(\bar{q}_1)\right)^2}$$

0,5

Per tant : $U_0 = -K\sqrt{\bar{q}_1 - \bar{q}_1 + \left(-\frac{MgL}{K}\sin(\bar{q}_1)\right)^2}$

$$U_0 = +K\frac{MgL}{K}\sin(\bar{q}_1) \rightarrow \boxed{U_0 = + MgL\sin(\bar{q}_1)}$$

3.3 Linialitzar amb aquest PE representar en Forma EF.

① $I\ddot{q}_1 + b_1\dot{q}_1 + MgL\sin(q_1) + K\sqrt{q_1 - q_2} = 0$

② $J\ddot{q}_2 + b_2\dot{q}_2 - K\sqrt{q_1 - q_2} - U = 0$

Linialitzant :

$$I\Delta\ddot{q}_1 + b_1\Delta\dot{q}_1 + \left(MgL\cos(q_{10}) + \frac{K}{2}(q_{10} - q_{20})^{-\frac{1}{2}}\right)\Delta q_1 - \frac{K}{2}(q_{10} - q_{20})^{-\frac{1}{2}}\Delta q_2 = 0$$

ojo!

$$J\Delta\ddot{q}_2 + b_2\Delta\dot{q}_2 - \frac{K}{2}(q_{10} - q_{20})^{-1/2}\Delta q_1 + \frac{K}{2}(q_{10} - q_{20})^{-1/2}\Delta q_2 - \Delta U = 0$$

: les Variables d'estat:

$$I\Delta\dot{x}_3 + b_1\Delta x_3 + \left(MgL\cos(\bar{q}_1) + \frac{k}{2}\left(\bar{q}_1 - \bar{q}_1 + \left(-\frac{MgL}{k}\sin(\bar{q}_1)\right)^2\right)^{-1/2}\right)\Delta x_1$$

$$-\frac{k}{2}\left(\bar{q}_1 - \bar{q}_1 + \left(-\frac{MgL}{k}\sin(\bar{q}_1)\right)^2\right)^{-1/2}\Delta x_2 = 0$$

$$J\Delta\dot{x}_4 + b_2\Delta x_4 - \frac{k}{2}\left(\bar{q}_1 - \bar{q}_1 + \left(-\frac{MgL}{k}\sin(\bar{q}_1)\right)^2\right)^{-1/2}\Delta x_1 + \frac{k}{2}\left(\bar{q}_1 - \bar{q}_1 + \left(-\frac{MgL}{k}\sin(\bar{q}_1)\right)^2\right)^{-1}$$

$$-\Delta U = 0$$

$$I\Delta\dot{x}_3 + b_1\Delta x_3 + \left(MgL\cos(q_1) + \left(\frac{k}{2}\left(-\frac{MgL}{k}\sin(\bar{q}_1)\right)^{-1}\right)\right)\Delta x_1$$

$$-\left(\frac{k_2}{2}\left(-\frac{MgL}{k}\sin(\bar{q}_1)\right)^{-1}\right)\Delta x_2 = 0$$

$$J\Delta\dot{x}_4 + b_2\Delta x_4 - \left(\frac{k}{2}\left(-\frac{MgL}{k}\sin(\bar{q}_1)\right)^{-1}\right)\Delta x_1 + \left(\frac{k}{2}\left(-\frac{MgL}{k}\sin(\bar{q}_1)\right)^{-1}\right)\Delta x_2 - \Delta U = 0$$

$$\Delta\dot{x}_3 = \frac{1}{I}\left[-b_1\Delta x_3 - \left(MgL\cos(\bar{q}_1) \cancel{+} \frac{k^2}{2MgL\sin(\bar{q}_1)}\right)\Delta x_1 \cancel{+} \frac{k^2}{2MgL\sin(q_1)}\Delta x_2\right]$$

$$\Delta\dot{x}_4 = \frac{1}{J}\left[-b_2\Delta x_4 - \frac{k^2}{2MgL\sin(q_1)}\Delta x_1 + \frac{k^2}{2MgL\sin(q_1)}\Delta x_2 + \Delta U\right]$$

9,5 / 10,00

Per tant:

$$\begin{pmatrix}\Delta\dot{x}_1\\ \Delta\dot{x}_2\\ \Delta\dot{x}_3\\ \Delta\dot{x}_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\frac{MgL\cos(\bar{q}_1)}{I} \cancel{+} \frac{k^2}{2IMgL\sin(\bar{q}_1)} & \cancel{-}\frac{k^2}{2IMgL\sin(\bar{q}_1)} & -\frac{b_1}{I} & 0\\ \cancel{-}\frac{k^2}{2JMgL\sin(\bar{q}_1)} & \cancel{+}\frac{k^2}{2JMgL\sin(\bar{q}_1)} & 0 & -\frac{b_2}{J}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \frac{1}{J}\end{pmatrix}\Delta U$$

$$y = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

3.4 $\frac{\Delta x_1}{\Delta U}$?

Per simplificar :

$$a = -\frac{MgL\cos(\bar{q}_1)}{I} \cancel{+} - \frac{K^2}{I2MgL\sin(\bar{q}_1)} \quad ; \quad b = +\frac{K^2}{2I\,MgL\sin(\bar{q}_1)}$$

$$c = +\frac{K^2}{J\,2MgL\sin(\bar{q}_1)} \quad ; \quad d = \cancel{+} - \frac{K^2}{2J\,MgL\sin(\bar{q}_1)} \quad ; \quad e = -\frac{b_1}{I} \quad ; \quad f = -\frac{b_2}{J}$$

Per tant:

$$\Delta\dot{x}_3 = e\Delta x_3 + a\Delta x_1 + b\Delta x_2$$

$$\Delta\dot{x}_4 = f\Delta x_4 + c\Delta x_1 + d\Delta x_2 + \Delta U / J \times \text{ojo!}$$

Transformant :

$$s^2\Delta x_1 = es\Delta x_1 + a\Delta x_1 + b\Delta x_2$$

$$s^2\Delta x_2 = fs\Delta x_2 + c\Delta x_1 + d\Delta x_2 + \Delta U$$

Aillem Δx_2 i substituim a la 2a.

(1) $b\Delta x_2 = (s^2 - es - a)\Delta x_1 \rightarrow \Delta x_2 = (s^2 - es - a)\frac{1}{b}\Delta x_1$

(2) $(s^2 - fs - d)\Delta x_2 = c\Delta x_1 + \Delta U$

Substituint :

$$(s^2 - fs - d)(s^2 - es - a)\frac{1}{b}\Delta x_1 = c\Delta x_1 + \Delta U$$

$$\left((s^4 - es^3 - as^2 - fs^3 + efs^2 + fas - ds^2 + eds + da)\frac{1}{b} - c\right)\Delta x_1 = +\Delta U$$

0,5

Per tant :

$$\boxed{\frac{\Delta x_1}{\Delta U} = \frac{b / J \text{ ojo!}}{s^4 - (e+f)s^3 + (-a + ef - d)s^2 + (fa + ed)s + da - cb}}$$

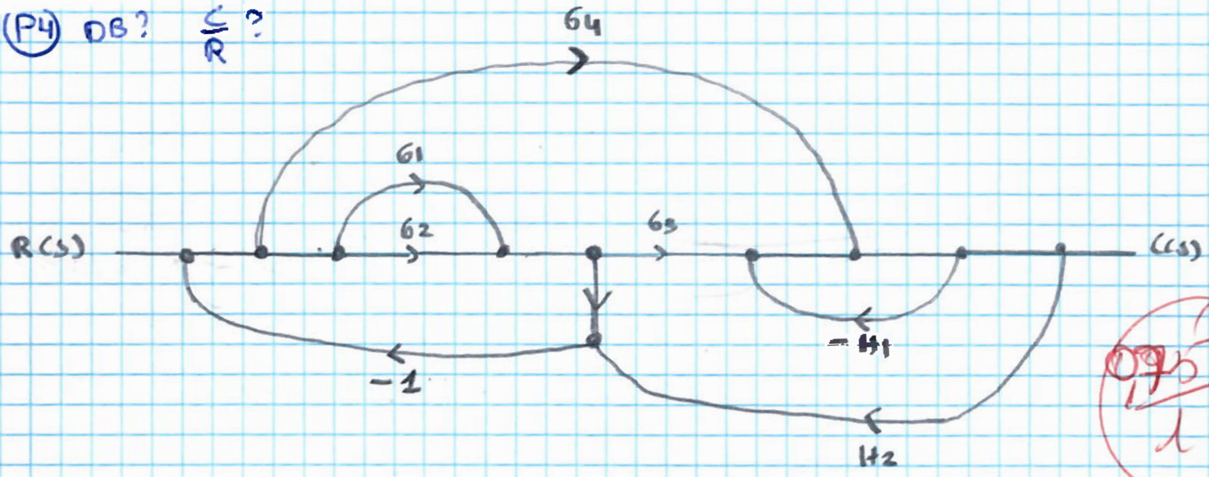
3.5 EE canonic

$$G(s) = \frac{b/J}{s^4 + (-e-g)s^3 + (-a+eg-d)s + (ga+ed)s + da-cb}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -da+cb & -ga-ed & a-eg+d & e+g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} U$$

$$y = \begin{pmatrix} b/J & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

(P4) DB? $\frac{C}{R}$?



$\frac{0.75}{1}$

Camí directe:

$P_1 = G_2G_3$

$P_2 = G_1G_3$

$P_3 = G_4$

Llaç:

$L_1 = -H_1$

$L_2 = -G_2$

$L_3 = -G_1$

$L_4 = -G_1G_3H_2$

$L_5 = -G_2G_3H_2$

$L_6 = -G_4H_2$

Llaç disjunt:

$\cancel{L_1L_2L_3 \rightarrow -H_1G_2G_1}$?!

NO!

Són de punt dos a dos

L_1L_2

L_1L_3

$\Delta_1 = 1$

$\Delta_2 = 1$

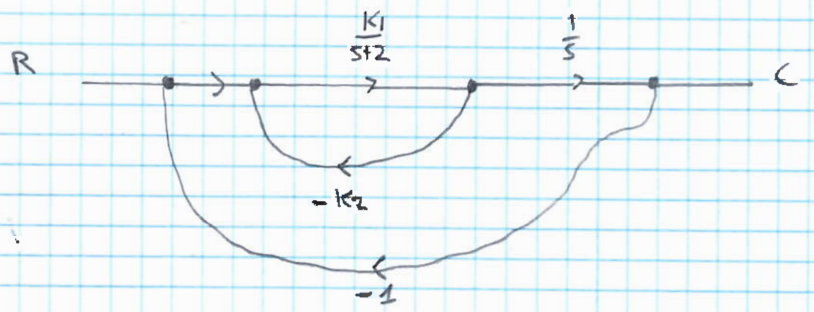
$\Delta_3 = 1$

$$\frac{C}{R} = \frac{P_1+P_2+P_3}{1-L_1-L_2-L_3-L_4-L_5-L_6-L_1L_2L_3} = \frac{G_2G_3+G_1G_3+G_4}{1+H_1+G_2+G_1+G_1G_3H_2+G_2G_3H_2+G_4H_2+\cancel{H_1G_2G_1}}$$

$+ G_2H_1 + G_1H_1$

(P5) K_1, K_2? pk $\frac{C}{R}$ tingui un sobrepic del 5% i un temps d'establiment de 4s

1r trobem la FDT :



$\frac{0,00}{1}$

Camí directe :

$$P_1 = \frac{K_1}{(s+2)s}$$

Llaç :

$$L_1 = -\frac{K_1 K_2}{s+2}$$

$$L_2 = -\frac{K_1}{(s+2)s}$$

Llaç disjunt :

$-$

$\Delta 1 = 1$

$$\frac{R}{C} = \frac{P_1}{1 - L_1 - L_2} = \frac{\frac{K_1}{(s+2)s}}{1 + \frac{K_1K_2}{(s+2)} + \frac{K_1}{(s+2)s}} = \frac{K_1}{(s+2)s + K_1K_2 s + K_1} =$$

$$= \frac{K_1}{s^2 + (K_1K_2 + 2)s + K_1} \quad //$$

0,20

$$M_p = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

2n comparem amb la FDT de 2n O per obtenir ξ, ω_n, K :

$$\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \Longleftrightarrow \frac{K_1}{s^2 + (K_1K_2+2)s + K_1}$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{(\ln M_p)^2}{\pi^2 + (\ln M_p)^2}} \cong 0,69$$

$K \approx 1$ // (guany unitari)

$\omega_n = \sqrt{K_1}$ //

0,25

$$K_1K_2 + 2 = 2\xi\omega_n \rightarrow K_1K_2 + 2 = 2 \cdot 0'05\sqrt{K_1} \rightarrow K_1K_2 + 2 = 0'1\sqrt{K_1}$$

ojo! $M_p = 5\%$ $\Rightarrow M_p = 0{,}05 \Rightarrow \zeta = \sqrt{\frac{(\ln M_p)^2}{\pi^2 + (\ln M_p)^2}}$!

$t_s = 4 = \frac{4}{\xi \omega_n} \to 4 = \frac{4}{0'05\sqrt{K_1}} \to \frac{1}{5}\sqrt{K_1} = 4 \to \boxed{K_1 = 400}$

$K_1 K_2 + 2 = 2\xi\sqrt{K_1}$

$400 K_2 + 2 = 2 \cdot 0'05 \sqrt{400} \to \boxed{K_2 = 0}$

0,25

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

1,75/2

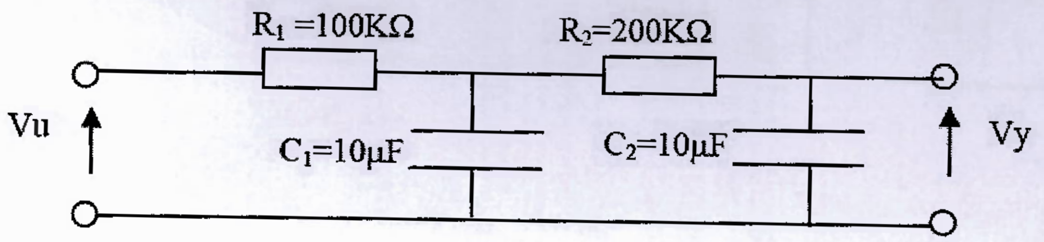
EXAMEN DE CONTROL AUTOMÀTIC

Grau en Enginyeria en Tecnologies Aeroespacials
Grau en Enginyeria en Vehicles Aeroespacials
Divendres 13 de Novembre de 2020 a les 11:00 hores

La durada total de l'examen és de 2:30 hores i la [illegible]bre 10.

Nom [illegible]

1. **(2 Pu**[illegible] la representació
interr[illegible] lors C_1 i C_2) del
circui[illegible]



Nota: Forma canònica controlable

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 & b_1 - b_n a_1 & b_2 - b_n a_2 & \cdots & b_{n-2} - b_n a_{n-2} & b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} [x] + b_n u$$

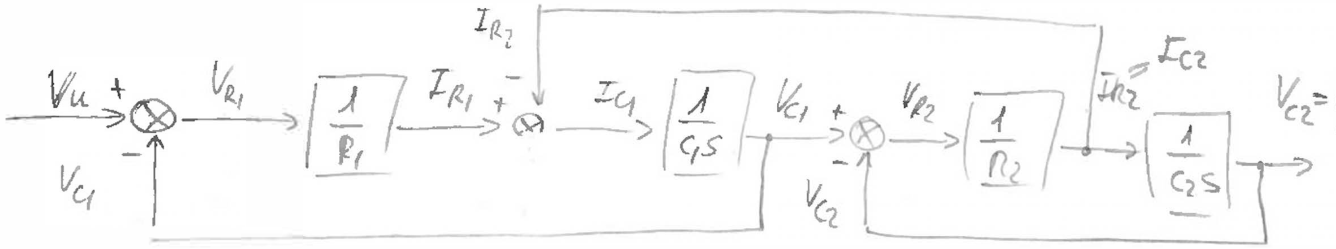
1.

representació interna canònica

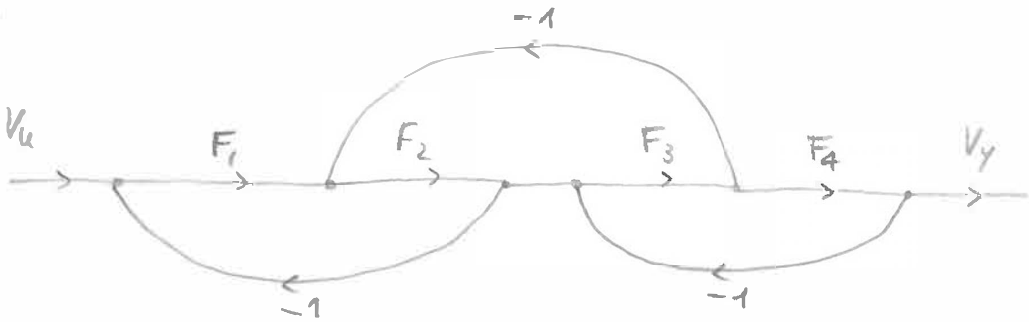
diagrama de blocs elementals

$V_{R_1} = R_1 I_{R_1}$ $\quad V_{R_2} = R_2 I_{R_2}$

$V_{C_1} = \dfrac{I_{C_1}}{C_1 s}$ $\quad V_{C_2} = \dfrac{I_{C_2}}{C_2 s}$



convertim en diagrama de flux



on
$F_1 = \dfrac{1}{R_1}$
$F_2 = \dfrac{1}{C_1 s}$
$F_3 = \dfrac{1}{R_2}$
$F_4 = \dfrac{1}{C_2 s}$

camins directes:

$P_1 = F_1 F_2 F_3 F_4$

llaços:

$L_1 = -F_1 F_2$

$L_2 = -F_2 F_3$

$L_3 = -F_3 F_4$

llaços disjunts:

$L_1 L_3$

determinant:

$\Delta = 1 - L_1 - L_2 - L_3 + L_1 L_3$

cofactor:

$\Delta_1 = 1$

$$\frac{V_y(s)}{V_u(s)} = \frac{P_1}{1 - L_1 - L_2 - L_3 + L_1 L_3}$$

$$\frac{V_y(s)}{V_u(s)} = \frac{F_1 F_2 F_3 F_4}{1 + F_1F_2 + F_2F_3 + F_3F_4 + F_1F_2F_3F_4} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2}}{1 + \dfrac{1}{R_1C_1s} + \dfrac{1}{R_2C_1s} + \dfrac{1}{R_2C_2s} + \dfrac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2}} =$$

$$= \frac{1}{R_1R_2C_1C_2s^2 + R_2C_2s + R_1C_2s + R_1C_1s + 1} =$$

0,75 / 1

$$= \frac{1}{(R_1R_2C_1C_2)s^2 + (R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2)s + 1} = \frac{b_0}{a_2s^2 + a_1s + a_0}.$$

on
$$\begin{cases} b_0 = 1 & a_1 = R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2 \\ a_2 = R_1R_2C_1C_2 & a_0 = 1 \end{cases}$$

usant la fórmula de l'examen, la forma canònica s'expressa com

?

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -R_1C_1 - R_1C_2 - R_2C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$i_c = C \frac{dv_c}{dt}$

Representació interna física on les variables d'estat són les tensions dels condensadors C_1 i C_2

variables d'estat : $\left.\begin{array}{l} x_1 = V_{C1} \\ x_2 = V_{C2} \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1 = \dfrac{dV_{C1}}{dt} \\ \dot{x}_2 = \dfrac{dV_{C2}}{dt} \end{array}\right.$

entrada : $u = V_u$

sortida : $y = V_y = V_{C2} = x_2$

equacions diferencials :

$$\begin{cases} (1) & i_{R_1}(t) = i_{C_1}(t) + i_{R_2}(t) \quad ; \quad V_{C_1} = V_{R_2} + V_{C_2} \\ (2) & i_{R_2}(t) = i_{C_2}(t) \qquad \hookrightarrow V_{R_2} = V_{C_1} - V_{C_2} \quad (3) \\ & i_{R_1}(t) = \dfrac{V_{R_1}}{R_1} \quad ; \quad i_{R_2}(t) = \dfrac{V_{R_2}}{R_2} \quad ; \quad V_u = V_{R_1} + V_{C_1} \\ & i_{C_1}(t) = C_1 \dfrac{dV_{C_1}}{dt} \; ; \; i_{C_2}(t) = C_2 \dfrac{dV_{C_2}}{dt} \qquad \hookrightarrow V_{R_1} = V_u - V_{C_1} \quad (4) \end{cases}$$

$$(1) \longrightarrow \frac{V_{R_1}}{R_1} = C_1 \frac{dV_{C_1}}{dt} + \frac{V_{R_2}}{R_2} \xrightarrow{(3),(4)} \frac{dV_{C1}}{dt} = \frac{1}{R_1} V_u - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) V_{C_1} + \frac{1}{R_2} V_{C2} \quad (5)$$

$$(2) \longrightarrow \frac{V_{R_2}}{R_2} = C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} \xrightarrow{(3)} \frac{dV_{C2}}{dt} = \frac{1}{R_2 C_2} V_{C1} - \frac{1}{R_2 C_2} V_{C2} \quad (6)$$

$$\left.\begin{array}{l} (5) \longrightarrow \dot{x}_1 = -\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) x_1 + \dfrac{1}{R_2} x_2 + \dfrac{1}{R_1} V_u \\ (6) \longrightarrow \dot{x}_2 = \dfrac{1}{R_2 C_2} x_1 - \dfrac{1}{R_2 C_2} x_2 \end{array}\right\}$$

Finalment, en forma matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) & \frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} \\ 0 \end{bmatrix} V_u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

1/1

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

$\frac{2}{3} + \frac{3}{3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1}$

MB!

EXAMEN DE CONTROL AUTOMÀTIC

Grau en Enginyeria en Tecnologies Aeroespacials

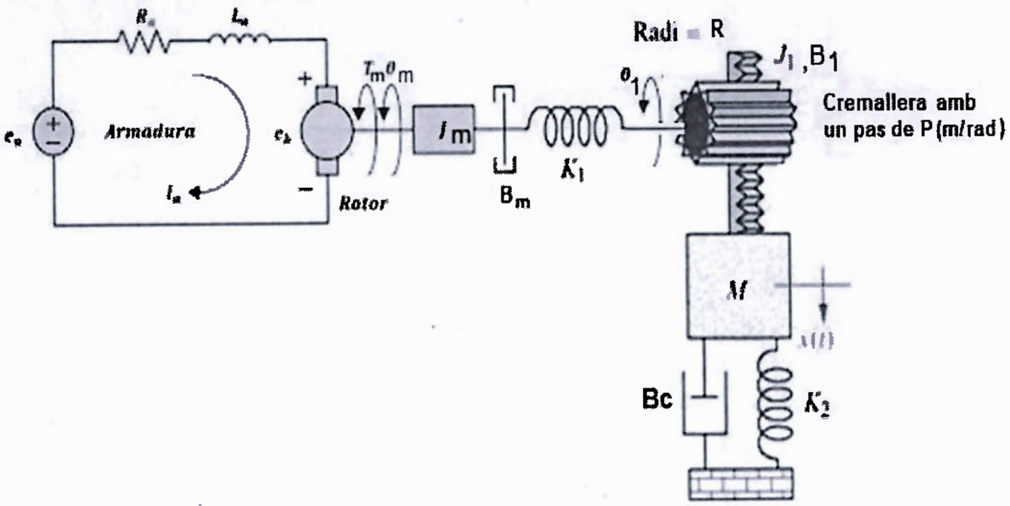
Grau en Enginyeria en Vehicles Aeroespacials

Divendres 13 de Novembre de 2020 a les 11:00 hores

... i la puntuació és sobre 10.

Nom ...

2. **(3 Pu** ... ontrolar la posició vertic ... gira amb un angle θ_1 i q ... tical gràcies a una cremallera dentada que es desplaça P metres per cada radian del cilindre, el qual té un moment d'inèrcia J_1 i un fregament B_1. El motor de corrent continua té els paràmetres habituals K_b, K_m, J_m i B_m. Entre l'eix del motor θ_m i l'eix del cilindre dentat θ_1 hi ha una molla de torsió amb constant K_1. La massa M està encaixada a la cremallera i en la seva part inferior hi ha una molla de constant K_2 i un fregament B_c.



2.1. Determineu totes les equacions diferencials d'aquest sistema o alternativament el diagrama de blocs elementals amb totes les variables que intervenen en el sistema.

2.2. Determineu la funció de transferència dels desplaçament vertical de la massa X(s) enfront del parell $T_{K1}(s)$ generat per la molla de torsió, ja sigui utilitzant les equacions diferencials o bé simplificant el diagrama de blocs elementals de l'apartat 2.1.

3. **(3 Punts)** El model dinàmic d'un sistema mecànic de rotació esta donat per les equacions següents:

$$I\frac{d^2q_1}{dt^2} + b_1\frac{dq_1}{dt} + MgL\,sin(q_1) + k\sqrt{(q_1 - q_2)} = 0$$

$$J\frac{d^2q_2}{dt^2} + b_2\frac{dq_2}{dt} - k\sqrt{(q_1 - q_2)} = u$$

②

2.1) equacions diferencials

$$\begin{cases} e_a(t) = K_b \dfrac{d\theta_m(t)}{dt} + R_a i_a(t) + L_a \dfrac{di_a(t)}{dt} \quad \checkmark \\ \tau_m(t) = K_m i_a(t) = J_m \dfrac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + B_m \dfrac{d\theta_m(t)}{dt} + K_1(\theta_m(t) - \theta_1(t)) \quad \checkmark \\ \tau_1(t) = J_1 \dfrac{d^2\theta_1(t)}{dt^2} + B_1 \dfrac{d\theta_1(t)}{dt} - K_1(\theta_m(t) - \theta_1(t)) \quad \checkmark \\ x(t) = P\theta_1(t) \quad \checkmark \\ M \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -K_2 x(t) - B_c \dfrac{dx(t)}{dt} + \dfrac{\tau_1(t)}{R} \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\circledast \; e_b(t) = K_b \frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

2/2

2.2) determinar la $\dfrac{X(s)}{T_{K_1}(s)} = \dfrac{X(s)}{T_1(s)}$

$$\boxed{2{,}5/3}$$

$$\begin{cases} E_a = K_b s\,\theta_m + R_a I_a + L_a s\, I_a \\ K_m I_a = J_m s^2 \theta_m + B_m s\,\theta_m + K_1(\theta_m - \theta_1) \\ T_1 = J_1 s^2 \theta_1 + B_1 s\,\theta_1 - K_1(\theta_m - \theta_1) \\ X = P\theta_1 \\ M s^2 X = K_2 X + B_c s X - \dfrac{T_1}{R} \end{cases}$$

$$\hookrightarrow (Ms^2 - K_2 - B_c s)X = -\frac{T_1}{R} \longrightarrow \cancel{\boxed{\frac{X(s)}{T_1(s)} = \frac{-1/R}{Ms^2 - B_c s - K_2}}}$$

no es T_{K_1} !!

no es tan simple

0,5/1

3/3

3.

$$\begin{cases} I \dfrac{d^2 q_1}{dt^2} + b_1 \dfrac{dq_1}{dt} + Mg L \sin(q_1) + K\sqrt{(q_1-q_2)} = 0 \\ J \dfrac{d^2 q_2}{dt^2} + b_2 \dfrac{dq_2}{dt} - K\sqrt{(q_1-q_2)} = u \end{cases}$$

sistema mecànic de rotació

3.1) triar les variables d'estat adequades i representar el sistema en espai d'estat

Entrada: u

Sortida: $y = [q_1 \;\; q_2]^T$

variables d'estat:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = q_1 \\ x_2 = \dfrac{dq_1}{dt} \\ x_3 = q_2 \\ x_4 = \dfrac{dq_2}{dt} \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1 = \dfrac{dq_1}{dt} \\ \dot{x}_2 = \dfrac{d^2 q_1}{dt^2} \\ \dot{x}_3 = \dfrac{dq_2}{dt} \\ \dot{x}_4 = \dfrac{d^2 q_2}{dt^2} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{b_1}{I} x_2 - \dfrac{MgL}{I}\sin(x_1) - \dfrac{K}{I}\sqrt{(x_1-x_3)} \\ \dot{x}_4 = -\dfrac{b_2}{J} x_4 + \dfrac{K}{J}\sqrt{(x_1-x_3)} + \dfrac{1}{J} u \end{cases}$$

0,5

$$y = \cancel{[1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0]} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2) determinar el punt d'equilibri en funció de $q_1 = \bar{q}_1$

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{q}_1}{dt} = \boxed{0 = \bar{x}_2} \\[2ex] \dfrac{d\bar{q}_2}{dt} = \boxed{0 = \bar{x}_4} \\[2ex] \dfrac{d^2\bar{q}_1}{dt^2} = 0 = -\dfrac{b_1}{I}\cancel{\dfrac{d\bar{q}_1}{dt}}^{0} - \dfrac{MgL}{I}\sin(\bar{q}_1) - \dfrac{K}{I}\sqrt{(\bar{q}_1-\bar{q}_2)} \\[2ex] \dfrac{d^2\bar{q}_2}{dt^2} = 0 = -\dfrac{b_2}{J}\cancel{\dfrac{d\bar{q}_2}{dt}}^{0} + \dfrac{K}{J}\sqrt{(\bar{q}_1-\bar{q}_2)} + \dfrac{1}{J}\bar{u} \end{cases}$$

$$\frac{K}{I}\sqrt{(\bar{q}_1-\bar{q}_2)} = -\frac{MgL}{I}\sin(\bar{q}_1)$$

$$\bar{q}_1 - \bar{q}_2 = \left(-\frac{MgL}{K}\sin(\bar{q}_1)\right)^2 = \left(\frac{MgL}{K}\right)^2\sin^2(\bar{q}_1)$$

$$\boxed{\bar{q}_2 = \bar{q}_1 - \left(\frac{MgL}{K}\right)^2\sin^2(\bar{q}_1) = \bar{x}_3}$$

$$\boxed{\bar{q}_1 = \bar{x}_1}$$

0,5

$$-\frac{K}{J}\sqrt{(\bar{q}_1-\bar{q}_2)} = \frac{1}{J}\bar{u}$$

$$\bar{u} = -K\sqrt{(\bar{q}_1-\bar{q}_2)}$$

$$\boxed{\bar{u} = -MgL\sin(\bar{q}_1)}$$

3.3) Linealitzar les equacions al voltant del punt d'equilibri i representar de forma matricial

$$\begin{cases} f_1 = \dot{x}_1 - x_2 = 0 \\ f_2 = \dot{x}_3 - x_4 = 0 \\ f_3 = \dot{x}_2 + \frac{b_1}{I} x_2 + \frac{Mgl}{I} \sin(x_1) + \frac{K}{I}\sqrt{(x_1 - x_3)} = 0 \\ f_4 = \dot{x}_4 + \frac{b_2}{J} x_4 - \frac{K}{J}\sqrt{(x_1-x_3)} - \frac{1}{J} u = 0 \end{cases}$$

$$\frac{K}{J}(x_1 - x_3)^{1/2}$$

Linealitzem

$$\begin{cases} \Delta\dot{x}_1 - \Delta x_2 = 0 \\ \Delta\dot{x}_3 - \Delta x_4 = 0 \\ \Delta\dot{x}_2 + \frac{b_1}{J}\Delta x_2 + \left(\frac{Mgl}{I}\cos(\bar{x}_1) + \frac{1}{2}\frac{K}{I}\frac{1}{\sqrt{\bar{x}_1 - \bar{x}_3}}\right)\Delta x_1 - \frac{1}{2}\frac{K}{I}\frac{1}{\sqrt{\bar{x}_1-\bar{x}_3}}\Delta x_3 = 0 \\ \Delta\dot{x}_4 + \frac{b_2}{J}\Delta x_4 - \frac{1}{2}\frac{K}{J}\frac{1}{\sqrt{\bar{x}_1-\bar{x}_3}}\Delta x_1 + \frac{1}{2}\frac{K}{J}\frac{1}{\sqrt{\bar{x}_1 - \bar{x}_3}}\Delta x_3 - \frac{1}{J}\Delta u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\dot{x}_1 = \Delta x_2 \\ \Delta\dot{x}_3 = \Delta x_4 \\ \Delta\dot{x}_2 = -\frac{b_1}{I}\Delta x_2 - \left(\frac{Mgl}{I}\cos(\bar{\xi}_1) + \frac{K^2}{2MgLI\sin(\bar{\xi}_1)}\right)\Delta x_1 + \frac{K^2}{2MgLI\sin(\bar{\xi}_1)}\Delta x_3 \\ \Delta\dot{x}_4 = -\frac{b_2}{J}\Delta x_4 + \frac{K^2}{2MgLJ\sin(\bar{\xi}_1)}\Delta x_1 - \frac{K^2}{2MgLJ\sin(\bar{\xi}_1)}\Delta x_3 + \frac{1}{J}\Delta u \end{cases}$$

$$
\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \\ \Delta \dot{x}_3 \\ \Delta \dot{x}_4 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 \\
\left(-\frac{MgL}{J}\cos(\xi_1) - \frac{k^2}{2MgLJ\sin(\xi_1)}\right) & -\frac{b_1}{J} & \frac{k^2}{2MgLJ\sin(\xi_1)} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
\frac{k^2}{2MgLJ\sin(\xi_1)} & 0 & \frac{-k^2}{2MgLJ\sin(\xi_1)} & -\frac{b_2}{J}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix} +
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}
$$

$$
\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

0,75

3.4) Calcular la funció de transferència $G(s) = \frac{\Delta Q_1(s)}{\Delta U(s)} = \frac{\Delta x_1(s)}{\Delta U(s)}$

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}
$$

De EE $\rightarrow$ FT (sent nula la sortida $\Delta x_3 = \Delta Q_2$)

$$
\frac{\Delta x_1(s)}{\Delta U(s)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ -a_{21} & s-a_{22} & -a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ -a_{41} & 0 & -a_{43} & s-a_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/J \end{bmatrix} =
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -a_{21} & 0 & -a_{41} \\ -1 & s-a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & -a_{23} & s & -a_{43} \\ 0 & 0 & -1 & s-a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/J \end{bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{x}_1\\ \Delta\dot{x}_2\\ \Delta\dot{x}_3\\ \Delta\dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \left(-\frac{MgL}{I}\cos(\xi_1) - \frac{K^2}{2MgLI\sin(\xi_1)}\right) & -\frac{b_1}{I} & \frac{K^2}{2MgLI\sin(\xi_1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K^2}{2MgLJ\sin(\xi_1)} & 0 & \frac{-K^2}{2MgLJ\sin(\xi_1)} & -\frac{b_2}{J}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \Delta x_3\\ \Delta x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \frac{1}{J}\end{bmatrix}$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & \cancel{0} & \cancel{1} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \Delta x_3\\ \Delta x_4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

0,75

3.4) Calcular la funció de transferència $G(s) = \frac{\Delta Q_1(s)}{\Delta U(s)} = \frac{\Delta x_1(s)}{\Delta U(s)}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix} \; ; \; C = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \; ; \; B = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\ \frac{1}{J}\end{bmatrix}$$

De EE $\longrightarrow$ FT (sent nula la sortida $\Delta x_3 = \Delta Q_2$)

$$\frac{\Delta x_1(s)}{\Delta U(s)} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ -a_{21} & s-a_{22} & -a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & s & -1 \\ -a_{41} & 0 & -a_{43} & s-a_{44}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1/J\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} s & -a_{21} & 0 & -a_{41} \\ -1 & s-a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & -a_{23} & s & -a_{43} \\ 0 & 0 & -1 & s-a_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1/J\end{bmatrix}$$

$$\frac{\Delta X_1(s)}{\Delta U(s)} = \begin{bmatrix} s & -a_{21} & 0 & -a_{41} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/J \end{bmatrix} = -a_{41}\frac{1}{J}$$

apliquem la transformada de Laplace a les equacions d'estat (amb CI = 0)

$$a_1 = \frac{b_1}{I} \;;\; a_2 = \frac{Mgl}{I}\cos(\bar{q}_1) + \frac{k^2}{2MglI\sin(\bar{q}_1)}$$

$$a_3 = \frac{k^2}{2MglI\sin(\bar{q}_1)} \;;\; a_4 = \frac{b_2}{J}$$

$$a_5 = \frac{k^2}{2MglJ\sin(\bar{q}_1)} \;;\; a_6 = \frac{1}{J}$$

$$\begin{cases} (1) \quad s\Delta X_1 = \Delta X_2 \\ (2) \quad s\Delta X_3 = \Delta X_4 \\ (3) \quad s\Delta X_2 = -a_1\Delta X_2 - a_2\Delta X_1 + a_3\Delta X_3 \\ (4) \quad s\Delta X_4 = -a_4\Delta X_4 + a_5\Delta X_1 - a_5\Delta X_3 + a_6\Delta U \end{cases}$$

$(1) \rightarrow (3)$

$$s^2\Delta X_1 = -a_1 s\Delta X_1 - a_2\Delta X_1 + a_3\Delta X_3$$

$$\Delta X_1\left(s^2 + a_1 s + a_2\right) = a_3\Delta X_3 \qquad (5)$$

$(2) \rightarrow (4)$

$$s^2\Delta X_3 = -a_4 s\Delta X_3 + a_5\Delta X_1 - a_5\Delta X_3 + a_6\Delta U$$

$(5) \rightarrow (4)$

$$s^2\frac{(s^2+a_1s+a_2)}{a_3}\Delta X_1 = (-a_4 s - a_5)\frac{(s^2+a_1s+a_2)}{a_3}\Delta X_1 + a_5\Delta X_1 + a_6\Delta U$$

$$\left(\frac{1}{a_3}s^4 + \frac{a_1}{a_3}s^3 + \frac{a_2}{a_3}s^2\right)\Delta X_1 = \left(-\frac{a_4}{a_3}s^3 - \frac{a_4a_1}{a_3}s^2 - \frac{a_4a_2}{a_3}s - \frac{a_5}{a_3}s^2 - \frac{a_5a_1}{a_3}s - \frac{a_5a_2}{a_3} + a_5\right)\Delta X_1 + a_6\Delta U$$

$$\frac{1}{a_3}s^4 + \frac{(a_1+a_4)}{a_3}s^3 + \frac{(a_2+a_4a_1+a_5)}{a_3}s^2 + \frac{(a_4a_2+a_5a_1)}{a_3}s + \frac{a_5a_2-a_5a_3}{a_3} = a_6\frac{\Delta U}{\Delta X_1}$$

finalment

0,25

$$\frac{\Delta x_1(s)}{\Delta U(s)} = \frac{a_6 a_3}{s^4 + (a_1+a_4)s^3 + (a_2+a_5+a_2 a_4)s^2 + (a_2 a_4 + a_5 a_1)s + (a_5 a_2 - a_5 a_3)}$$

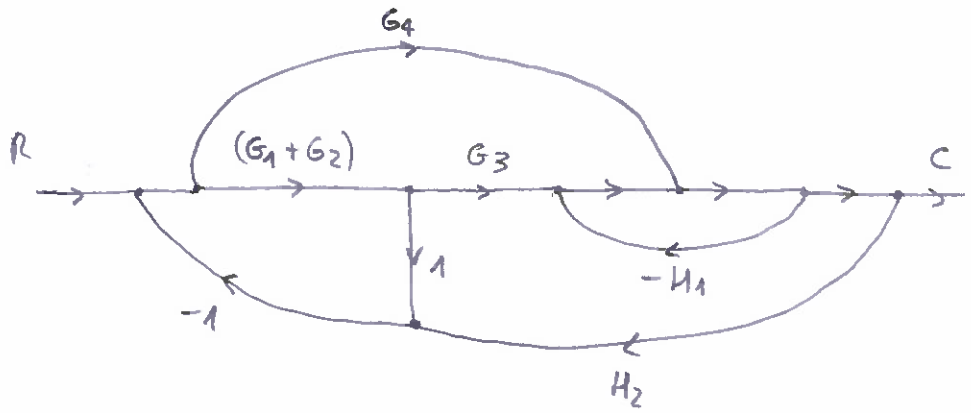
3.5) a partir de G(s) determinar les eq. en forma canònica

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1 \\ \Delta \dot{x}_2 \\ \Delta \dot{x}_3 \\ \Delta \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -(a_5 a_2 - a_5 a_3) & -(a_2 a_4 + a_5 a_1) & -(a_2 + a_5 + a_2 a_4) & -(a_1 + a_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} a_6 a_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta x_4 \end{bmatrix}$$

0,5

4. reduir i trobar $\frac{C(s)}{R(s)}$



Camins directes:

$$\begin{cases} P_1 = (G_1+G_2)G_3 \\ P_2 = G_4 \end{cases}$$

llaços:

$$\begin{cases} L_1 = -H_1 \\ L_2 = -(G_1+G_2)G_3H_2 \\ L_3 = -G_4H_2 \\ L_4 = -(G_1+G_2) \end{cases}$$

llaços disjunts:

L_1L_4

determinant:

$$\Delta = 1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 + L_1L_4$$

cofactors:

$$\begin{cases} \Delta_1 = 1 \\ \Delta_2 = 1 \end{cases}$$

1

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{P_1 + P_2}{1-L_1-L_2-L_3-L_4+L_1L_4} = \frac{(G_1+G_2)G_3 + G_4}{1 + H_1 + (G_1+G_2)G_3H_2 + G_4H_2 + (G_1+G_2) + H_1(G_1+G_2} =$$

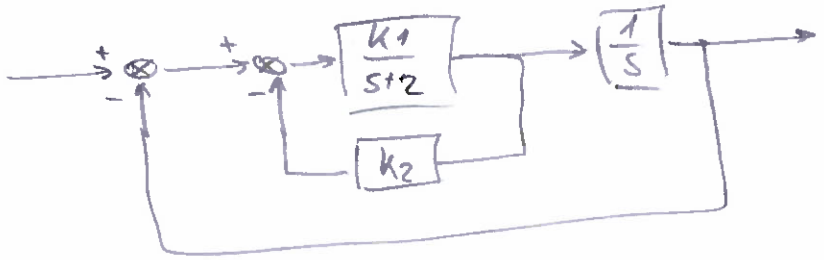
$$= \boxed{\frac{(G_1+G_2)G_3 + G_4}{(G_1+G_2)(G_3H_2 + H_1 + 1) + G_4H_2 + H_1 + 1}}$$

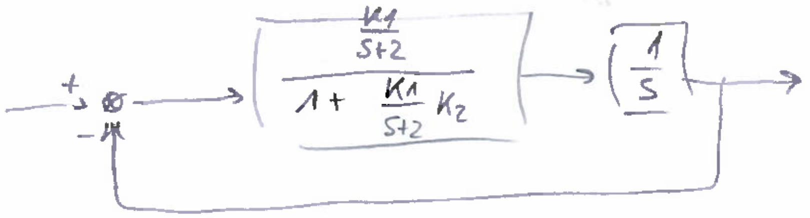
5.

$$\begin{cases} M_p = 5\% = e^{\left(-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}\right)} \\ t_s(2\%) = 4s = 4\tau = \dfrac{4}{\xi\omega_n} \end{cases}$$

λ

reduim el diagrama per trobar la funció de transferència





$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{\frac{K_1}{s+2}}{1+\frac{K_1}{s+2}K_2}\cdot\dfrac{1}{s}}{1+\left(\dfrac{\frac{K_1}{s+2}}{1+\frac{K_1}{s+2}K_2}\right)\dfrac{1}{s}} = \frac{\dfrac{K_1}{s+2+K_1K_2}\cdot\dfrac{1}{s}}{1+\dfrac{K_1}{s+2+K_1K_2}\cdot\dfrac{1}{s}} =$$

$$= \frac{K_1}{s^2+(2+K_1K_2)s+K_1} = \frac{K\,\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

Identifiquem :

$$\begin{cases} \omega_n^2 = K_1 \longrightarrow \underbrace{\omega_n = \sqrt{K_1}} \\ 2\xi\omega_n = 2+K_1K_2 = 2+\omega_n^2K_2 \longrightarrow \xi = \dfrac{1}{\omega_n}+\dfrac{\omega_nK_2}{2} = \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{K_1}}+\dfrac{\sqrt{K_1}K_2}{2}} \\ K\,\omega_n^2 = K_1 \longrightarrow K = \dfrac{K_1}{\omega_n^2} = \dfrac{\omega_n^2}{\omega_n^2} = \underbrace{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) & 4 = \dfrac{4}{\xi \omega_n} \longrightarrow \xi \omega_n = 1 \longrightarrow \left(\dfrac{1}{\sqrt{K_1}} + \dfrac{\sqrt{K_1} K_2}{2} \right) \sqrt{K_1} = 1 \\ (2) & 0{,}05 = e^{-\xi \pi / \sqrt{1-\xi^2}} \longrightarrow \ln(0{,}05) = \dfrac{-\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}} \end{cases}$$

$$(1) \longrightarrow 1 + \frac{K_1 K_2}{2} = 1 \longrightarrow \underline{K_1 K_2 = 0}$$

$$(2) \longrightarrow \ln(0{,}05) = \frac{-\dfrac{1}{\sqrt{K_1}}\pi - \dfrac{\sqrt{K_1} K_2 \pi}{2}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{K_1}} + \dfrac{\sqrt{K_1} K_2}{2} \right)^2}}$$

si $K_2 = 0 \longrightarrow$ $\ln(0{,}05) \sqrt{1 - \dfrac{1}{K_1}} = - \dfrac{\pi}{\sqrt{K_1}}$

$$\left(1 - \frac{1}{K_1}\right) \ln^2(0{,}05) = + \frac{\pi^2}{K_1}$$

$$K_1 - 1 = \frac{+\pi^2}{\ln^2(0{,}05)}$$

$$K_1 = \left(\frac{\pi}{\ln(0{,}05)} \right)^2 + 1 = 2{,}0997 \simeq \boxed{2{,}1}$$

$$K_2 = \boxed{0}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

EXAMEN FINAL DE CONTROL AUTOMÀTIC

Grau en Enginyeria en Tecnologies Aeroespacials
Grau en Enginyeria en Vehicles Aeroespacials
Dilluns 18 de Gener de 2021 a les 18:00 hores

La durada total de l'examen és de 2:30 hores i la puntuació és sobre 10.

Primera Part: SENSE APUNTS

Nom i Cognoms de l'estudiant: ____

1. **(2 punts)** Es vol fer un control del motor de corrent continu del laboratori. S'ha identificat el sistema i la funció de transferència que relaciona l'entrada al driver amb la sortida a la tacodinamo és $G(s) = 0.89 / (0.12s + 1)$. La tacodinamo es pot considerar com una constant $K_t = 0.007$ V / rpm.

1.1. Si es fa el control en llaç obert quina entrada necessitarem per tal que el motor giri a 1000 rpm?

1.2. Quin serà el temps d'establiment amb el criteri del 2%.

1.3. Es tanca el llaç amb un controlador proporcional per reduir el temps d'establiment a 0.1s. Quin serà el valor mínim de la constant Kp per complir l'especificació?

1.4. Quina serà la consigna en llaç tancat?

EXAMEN FINAL DE CONTROL AUTOMÀTIC

Grau en Enginyeria en Tecnologies Aeroespacials
Grau en Enginyeria en Vehicles Aeroespacials
Dilluns 18 de Gener de 2021 a les 18:00 hores

La durada total de l'examen és de 2:30 hores i la puntuació és sobre 10.

Segona Part

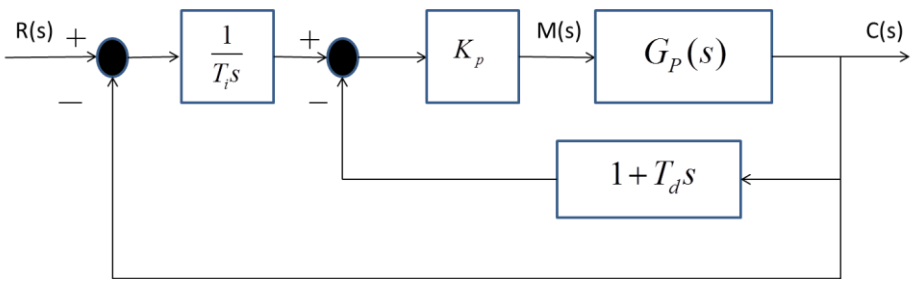
Nom i Cognoms de l'estudiant: ______________________________

2. **(3 punts)** Es pretén estudiar l'estabilitat d'un sistema en llaç tancat del qual es coneix la seva funció de transferència en llaç obert:

$$C(s)G(s) = \frac{K_P(0.5+s)(10+5s)}{s^2(-0.5+s)}$$

2.1. Per a Kp=1, determineu el diagrama freqüencial de Bode i especifiqueu quines son les característiques del sistema en llaç obert: guany en continu, pulsació de tall, pulsació de ressonància, pic de ressonància i ample de banda.
2.2. Per a Kp=1, analitzeu pel mètode de Nyquist l'estabilitat del sistema en llaç tancat. Determineu l'interval de Kp que fa estable el sistema en llaç tancat.
2.3. Comproveu pel mètode de Routh els resultats de l'apartat precedent.

3. **(3 punts)** Donat el sistema de control de la figura següent



$$G_P(s) = \frac{(s+10)}{(s+0.2)}$$

3.1. Determineu els valors de Kp, Ti i Td de tal forma que la resposta del sistema realimentat sigui estable amb un temps d'establiment de 4 segons i un sobreimpuls (overshoot) del 16%.
3.2. Determineu els valors de Kp, Ti i Td per aconseguir una resposta critica de segon ordre ("overshoot" percentual MP=0%) i un temps d'estabilització de 4 segons.
3.3. Determineu quina és la precisió del sistema davant d'un graó, una rampa i una paràbola unitaris.

4. **(2 punts)** Donada la funció de transferència en llaç obert següent:

$$GH(s) = \frac{K(s+10)}{s(0.5s+1)} e^{-0.01s}$$

4.1. Per K=1, determineu el marge de guany i marge de fase de GH(s).
4.2. Calculeu el valor de K que faci que el sistema tingui un marge de guany de 16dB.

Solució Examen Final CA_Gener 2021

Exercici 2:

Es pretén estudiar l'estabilitat d'un sistema en llaç tancat del qual es coneix la seva funció de transferència en llaç obert:

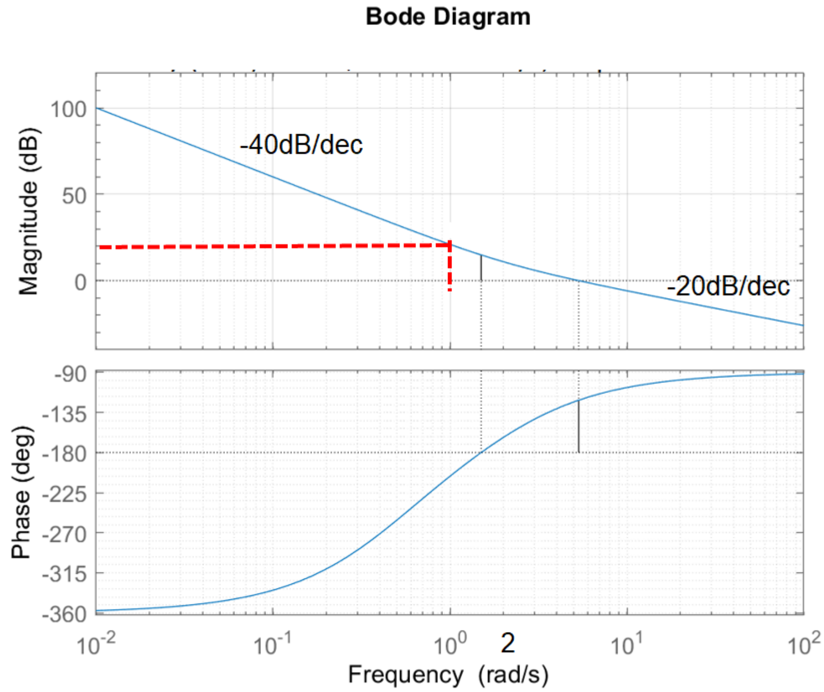
$$C(s)G(s) = \frac{K_P(0.5+s)(10+5s)}{s^2\left(-0.5+s\right)}$$

2.1. Per a Kp=1, determineu el diagrama freqüencial de Bode i especifiqueu quines son les característiques del sistema en llaç obert: guany en continu, pulsació de tall, pulsació de ressonància, pic de ressonància i ample de banda.
2.2. Per a Kp=1, analitzeu pel mètode de Nyquist l'estabilitat del sistema en llaç tancat. Determineu l'interval de Kp que fa estable el sistema en llaç tancat.
2.3. Comproveu pel mètode de Routh els resultats de l'apartat precedent.

Solució:

2.1. Primer es es pot calcular la taula frequencial a partir de l'expressió amb Kp=1

	0	0.5	2
Modul/fase			
-10	**0/-2**	**0/-2**	**0/-2**
(1+s/0.5)	**0/0**	**+1/+1**	**+1/+1**
(1+s/2)	**0/0**	**0/0**	**+1/+1**
1/s^2	**-2/-2**	**-2/-2**	**-2/-2**
1/(1-s/0.5)	**0/0**	**-1/+1**	**-1/+1**
total	**-2/-4**	**-2/-2**	**-1/-1**



Caracteristiques freqüencials:

Guany (w=0)=Infinit, wt= 5.34 rad/s, no pic de resonància i ample de banda=[0,0]

2.2. Marge de fase i de guany (examen global) :

Les fórmules de guany i fase de G(s) son :

$$|G \quad)| \quad \frac{10\sqrt{1 \qquad} \; \sqrt{1 \qquad}}{\sqrt{1 \qquad}} \qquad \frac{\sqrt{1 \qquad}}{}$$

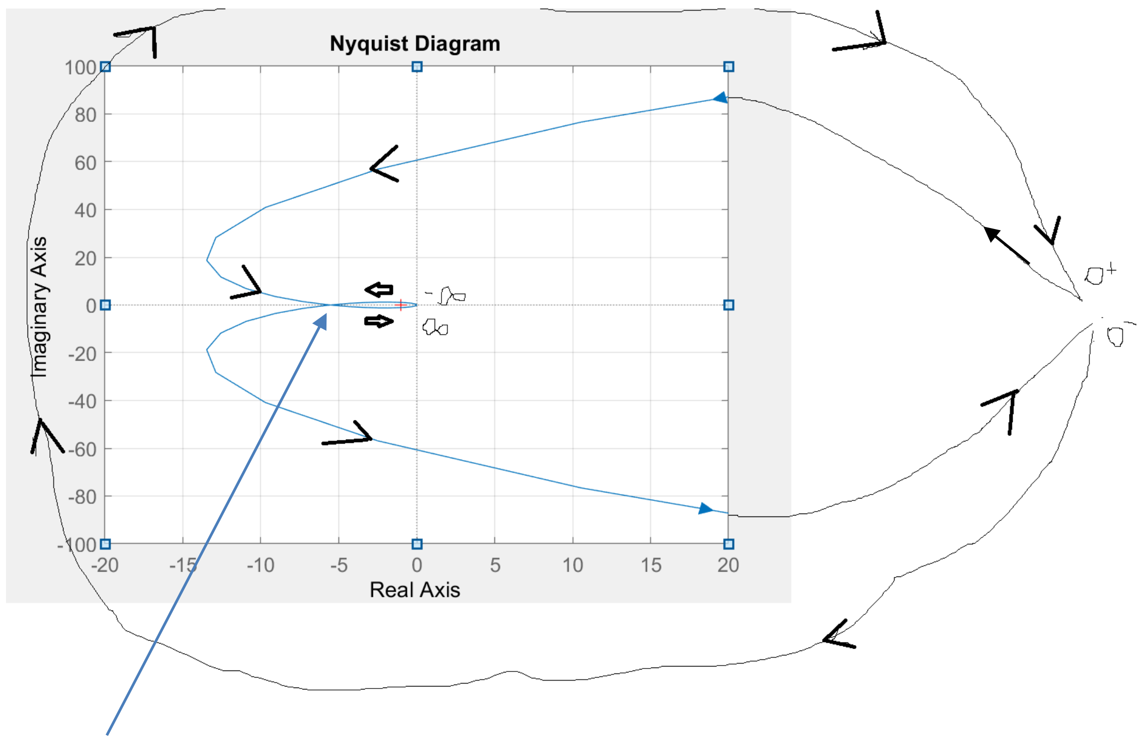
$$\text{atan}\left(\frac{}{}\right) \quad \text{atan}\left(\frac{}{}\right)$$

Per w=5.34 rad/s el mòdul de G(jw) és 1 (0dB) i per tant es la pulsació de tall. I la fase per w=5.34 rad/s és Fase(G(jwt))=-121º. Per tant el marge de fase és : MF=180º-121º=59º

I la fase serà aproximadament -180º per w_{-180}=1.5 rad/s i el mòdul de G(jw) per aquesta w-180 és de valor aprox. 5,55 (15 dB), per tant el marge de guany és :

MG=1/5.55=0.18 (-15dB)

Per a Kp=1, analitzeu pel mètode de Nyquist l'estabilitat del sistema en llaç tancat. Determineu el interval de Kp que fa estable el sistema en llaç tancat.



Kp>0.18 → N=-1 i com P=1 llavors Z=0 Estable en llaç tancat

Kp<0.18 → N=+1 i com P=1 llavors Z=2 Inestable en llaç tancat

2.3.Comproveu pel mètode de Routh els resultats precedents :

$$(5 \qquad 5)s$$

s^3	1	12.5Kp
s^2	5Kp-0.5	5Kp
s	(62.5Kp^2-11.25Kp)/(5Kp-0.5)	0
s^0	5Kp	

Per tant les condicions d'estabilitat són :

5Kp-0.5>0 → Kp>0.1

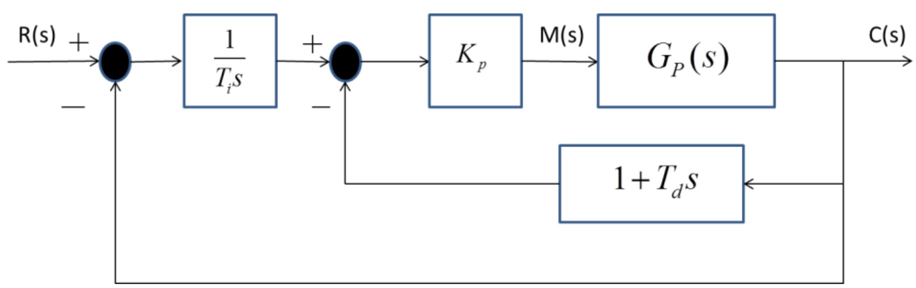
(62.5Kp^2-11.25Kp)>0 → 62.5Kp>11.25 → Kp>0.18 que és la condició més restrictiva

5Kp>0 → Kp>0

El resultat confirma que per Kp=1 el sistema realimentat és estable i que la banda estable de Kp és Kp>0.18

Exercici 3:

Donat el sistema de control de la figura següent



$$G_P(s) = \frac{(s+10)}{(s+0.2)}$$

3.1. Determineu els valors de Kp, Ti i Td de tal forma que la resposta del sistema realimentat sigui estable amb un temps d'establiment de 4 segons i un sobreimpuls (overshoot) del 16%.

3.2. Determineu els valors de Kp, Ti i Td per aconseguir una resposta critica de segon ordre ("overshoot" percentual MP=0%) i un temps d'estabilització de 4 segons.

3.3. Determineu quina és la precisió del sistema davant d'un graó, una rampa i una paràbola unitaris.

Solució:

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\frac{1}{T_i s}G(s)}{1+\frac{1}{T_i s}G(s)}$$

$$G(s)=\frac{K_P\frac{s+10}{s+0.2}}{1+K_P\frac{s+10}{s+0.2}\left(1+T_d s\right)}=\frac{K_P\left(s+10\right)}{\left(s+0.2\right)+K_P\left(s+10\right)\left(1+T_d s\right)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K_P\left(s+10\right)}{T_i s\left(\left(s+0.2\right)+K_P\left(s+10\right)\left(1+T_d s\right)\right)+K_P\left(s+10\right)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K_P\left(s+10\right)}{K_P T_i T_d s^3+s^2\left(T_i+K_P T_i+10K_P T_i T_d\right)+s\left(0.2T_i+10K_P T_i+K_P\right)+10K_P}$$

$$P_c(s)=s^3+s^2\frac{\left(T_i+K_P T_i+10K_P T_i T_d\right)}{K_P T_i T_d}+s\frac{\left(0.2T_i+10K_P T_i+K_P\right)}{K_P T_i T_d}+\frac{10K_P}{K_P T_i T_d}$$

$$P_c(s)=s^3+s^2\left(\frac{1}{K_P T_d}+\frac{1}{T_d}+10\right)+s\left(\frac{0.2}{K_P T_d}+\frac{1}{T_i T_d}+\frac{10}{T_d}\right)+\frac{10}{T_i T_d}$$

Especificació:

$$M_P=0.16 \quad\rightarrow\quad \xi=\sqrt{\frac{\left(\ln(M_P)\right)^2}{\pi^2+\left(\ln(M_P)\right)^2}}=0.5039\approx 0.5$$

$$t_s=4s=\frac{4}{\xi\omega_n} \quad\rightarrow\quad \xi\omega_n=1 \quad\rightarrow \omega_n=\frac{1}{\xi}\approx 2\ rad/s$$

$$P_c(s)=(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)(s+a)=s^3+s^2(2\xi\omega_n+a)+s(\omega_n^2+2\xi\omega_n a)+a\omega_n^2$$

$$\begin{cases}\frac{1}{K_P T_d}+\frac{1}{T_d}+10=(2\xi\omega_n+a)\\ \frac{0.2}{K_P T_d}+\frac{1}{T_i T_d}+\frac{10}{T_d}=(\omega_n^2+2\xi\omega_n a)\\ \frac{10}{T_i T_d}=a\omega_n^2\end{cases} \quad\rightarrow\quad \begin{cases}\frac{1}{K_P T_d}+\frac{1}{T_d}=(2\xi\omega_n+a)-10\\ \frac{0.2}{K_P T_d}+\frac{10}{T_d}=(\omega_n^2+2\xi\omega_n a)-\frac{a\omega_n^2}{10}\\ \frac{1}{T_i T_d}=\frac{a\omega_n^2}{10}\end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+K_P=(2\xi\omega_n+a-10)K_PT_d \\ 0.2+10K_P=(\omega_n^2+2\xi\omega_n a-0.1a\omega_n^2)K_PT_d \\ \dfrac{1}{T_iT_d}=\dfrac{a\omega_n^2}{10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1+K_P=(a-8)K_PT_d \\ 0.2+10K_P=(3.9383+1.6062a)K_PT_d \\ \dfrac{1}{T_iT_d}=0.39383a \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} K_P=(a-8)K_d-1 \\ K_d=\dfrac{9.8}{(8.3938a-83.9383)} \\ T_i=\dfrac{1}{0.39383aT_d} \end{cases} \quad \textit{Triem a=20} \quad \rightarrow \begin{cases} K_P=0.401 \\ T_d=0.2911\,s \\ T_i=0.4361\,s \end{cases}$$

3.2.

$$M_P=0\% \quad \rightarrow \quad \xi=1 \quad \rightarrow \quad t_s=4s=\frac{4}{\xi\omega_n} \quad \rightarrow \quad \xi\omega_n=1 \quad \rightarrow \omega_n=\frac{1}{\xi}=1rad/s$$

$$P_c(s)=(s+1)^2(s+a)=s^3+s^2(2+a)+s(1+2a)+a$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{K_PT_d}+\dfrac{1}{T_d}+10=(2+a) \\ \dfrac{0.2}{K_PT_d}+\dfrac{1}{T_iT_d}+\dfrac{10}{T_d}=(1+2a) \\ \dfrac{10}{T_iT_d}=a \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1+K_P=(a-8)K_PT_d \\ 0.2+10K_P=(1+1.9a)K_PT_d \\ \dfrac{1}{T_iT_d}=\dfrac{a}{10} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} K_P=(a-8)K_d-1 \\ K_d=\dfrac{9.8}{(8.1a-81)} \\ T_i=\dfrac{1}{0.1aT_d} \end{cases}$$

$$\textit{Triem a=20} \quad \rightarrow \begin{cases} K_P=0.4519 \\ T_d=0.2678\,s \\ T_i=1.8673\,s \end{cases}$$

3.3 Precisió

$$F.T \text{ en llaç obert: } G_{LO}(s) = \frac{1}{T_i s} G(s) = \frac{K_P(s+10)}{T_i s\left((s+0.2) + K_P(s+10)(1+T_d s)\right)}$$

Sistema de tipus 1

$$\text{Error davant entrada graó: } E_{RP} = 0$$

$$\text{Error davant entrada rampa: } E_{RP} = \frac{1}{K_v} = \frac{T_i(0.2+10K_P)}{10K_P}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_{LO}(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K_P(s+10)}{T_i\left((s+0.2) + K_P(s+10)(1+T_d s)\right)} = \frac{10K_P}{T_i(0.2+10K_P)}$$

$$\text{Error davant entrada rampa: } E_{RP} = \infty$$

Exercici 4:

Donada la funció de transferència en llaç obert següent:

$$GH(s) = \frac{K(s+10)}{s(0.5s+1)} e^{-0.01s}$$

3.4.Per K=1, determineu el marge de guany i marge de fase de GH(s).
3.5.Calculeu el valor de K que faci que el sistema tingui un marge de guany de 16dB.

Solució:

4.1. MG i MF

$$GH(s) = \frac{(s+10)}{s(0.5s+1)} e^{-0.01s}$$

$$Fase = a\tan\left(\frac{\omega}{10}\right) - 90^{\circ} - a\tan(0.5\omega) - 0.01\omega\frac{180^{\circ}}{\pi}$$

$$|GH(j\omega_{MG})| = \frac{\sqrt{\omega^2+100}}{\omega\sqrt{(0.5\omega)^2+1}}$$

$$Fase = -180^{\circ} \quad \to \omega_{MG} \approx 152\ rad/s \quad \to \quad MG = 0 - |GH(j\omega_{MG})|_{dB} = 37,6\ dB$$

$$|GH(j\omega_{MF})| = \frac{\sqrt{\omega^2+100}}{\omega\sqrt{(0.5\omega)^2+1}} = 1 \quad \to \quad \omega_{MG} \approx 4,47\ rad/s \quad \to \quad MF = 45,6^{\circ}$$

4.2 . Valor de K per obtenir un MG=16 dB

Per a $K_1 = 1$ tenim $\mathrm{MG}_1 = 37{,}6\ dB$

Per a $K_2 = ?$ tenim $\mathrm{MG}_2 = 16\ dB$

$K_2 = K_1 10^{(MG_1 - MG_2)/20} \approx 12$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

1|2

EXAMEN FINAL DE CONTROL AUTOMÀTIC

Grau en Enginyeria en Tecnologies Aeroespacials
Grau en Enginyeria en Vehicles Aeroespacials
Dilluns 18 de Gener de 2021 a les 18:00 hores

La durada total de l'examen és de ... 10.

Nom i ...

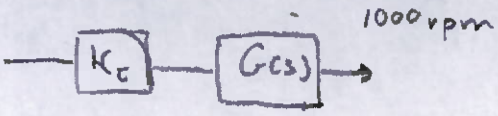
1. **(2** ... boratori. S'ha ide... rada al driver amb ... $G(s) = 0.89 / (0.12s + 1)$. La tacodinamo es pot considerar com una constant $K_t = 0.007$ V / rpm.

1.1. Si es fa el control en llaç obert quina entrada necessitarem per tal que el motor giri a 1000 rpm?

1.2. Quin serà el temps d'establiment amb el criteri del 2%.

1.3. Es tanca el llaç amb un controlador proporcional per reduir el temps d'establiment a 0.1s. Quin serà el valor mínim de la constant Kp per complir l'especificació?

1.4. Quina serà la consigna en llaç tancat?



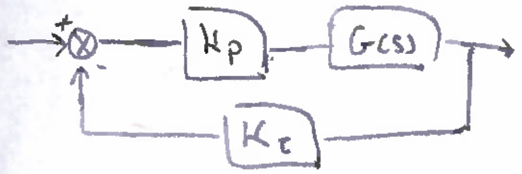
$$G(s) = \frac{0{,}89}{0{,}12s+1}$$

$$0{,}007 \cdot 1000 = 7V \rightarrow \boxed{\frac{7}{0{,}89} = 7{,}865\,V}$$

El temps d'establiment

$$t_s = 4\tau \rightarrow \boxed{0{,}48\,s = t_s}$$

on $\tau \rightarrow \dfrac{K}{\tau s+1} = G(s)$



$$\frac{0,89\,K_p}{0,12\,s+1}$$

$$\frac{0,89\,K_p}{1+\dfrac{0,89\,K_p K_t}{0,12\,s+1}} \longrightarrow \frac{0,89\,K_p}{0,12\,s+1+0,89\,K_p K_t}$$

?

?

$$\frac{\dfrac{0,89\,K_p}{1+0,89\,K_p K_t}}{\dfrac{0,12\,s}{1+0,89\,K_p K_t}+1}$$

$$\tau = \frac{0,12}{1+0,89\,K_p K_t}$$?!

$K_p = \cancel{609,95}$ NO!

$$\frac{7}{\dfrac{0,89\,K_p}{1+0,89\,K_p K_t}} = 0,062\ V$$ NO!

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

$\frac{2}{3} + \frac{0,75}{3} + \frac{0,75}{2}$

EXAMEN FINAL DE CONTROL AUTOMÀTIC

Grau en Enginyeria en Tecnologies Aeroespacials
Grau en Enginyeria en Vehicles Aeroespacials
Dilluns 18 de Gener de 2021 a les 18:00 hores

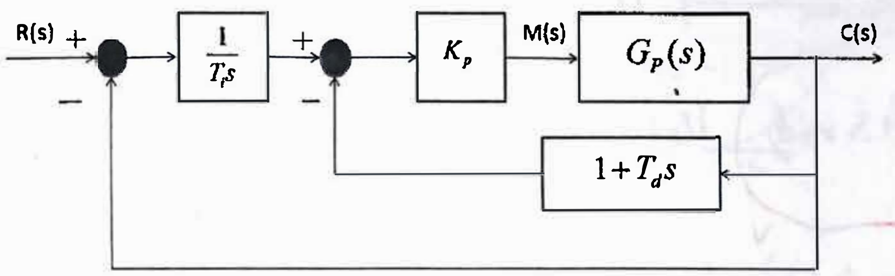
La durada total de l'exam… ió és sobre 10.

… llaç tancat del qual es

$$C(s)G(s)=\frac{K_p(0.5+s)(10+\dots)}{s^2(-0.5+s)}$$

2.1. Per a Kp=1, determineu el diagrama freqüencial de Bode i especifiqueu quines son les característiques del sistema en llaç obert: guany en continu, pulsació de tall, pulsació de ressonància, pic de ressonància i ample de banda.
2.2. Per a Kp=1, analitzeu pel mètode de Nyquist l'estabilitat del sistema en llaç tancat. Determineu l'interval de Kp que fa estable el sistema en llaç tancat.
2.3. Comproveu pel mètode de Routh els resultats de l'apartat precedent.

3. **(3 punts)** Donat el sistema de control de la figura següent



$$G_P(s)=\frac{(s+10)}{(s+0.2)}$$

3.1. Determineu els valors de Kp, Ti i Td de tal forma que la resposta del sistema realimentat sigui estable amb un temps d'establiment de 4 segons i un sobreimpuls (overshoot) del 16%.
3.2. Determineu els valors de Kp, Ti i Td per aconseguir una resposta critica de segon ordre ("overshoot" percentual MP=0%) i un temps d'estabilització de 4 segons.
3.3. Determineu quina és la precisió del sistema davant d'un graó, una rampa i una paràbola unitaris.

$$G(s) = \frac{K_p(0{,}5+s)(10+5s)}{s^2(-0{,}5+s)}$$

$K_p = 1$

$$G(s) = \frac{(0{,}5+s)(10+5s)}{s^2(-0{,}5+s)}$$

$(0{,}5+s) \rightarrow 0{,}5(1+2s)$

$(10+5s) \rightarrow 10(1+\frac{s}{2})$

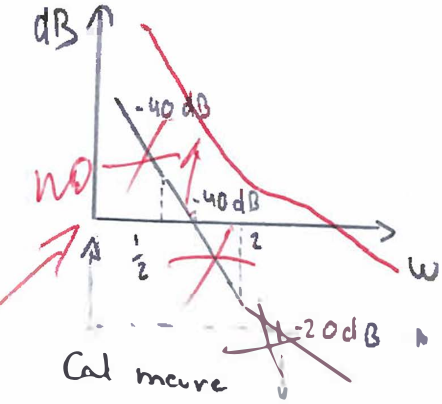
$(-0{,}5+s) \rightarrow -0{,}5(1-2s)$

$$G(s) = \frac{0{,}5\cdot 10(1+2s)(1+\frac{s}{2})}{s^2\cdot(-0{,}5)(1-2s)} = -\frac{10(1+2s)(1+\frac{s}{2})}{s^2(1-2s)}$$

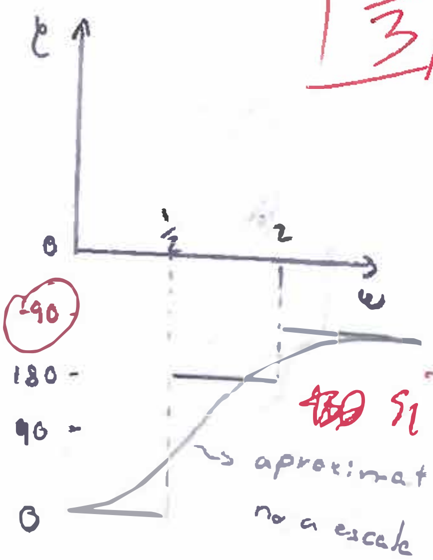
Bode

	0 – ½	½ – 2	2 – ∞
-10	0 / -2	0 / -2	0 / -2
(1+2s)	0 / 0	+1 / +1	+1 / +1
$(1+\frac{s}{2})$	0 / 0	0 / 0	+1 / +1
$\frac{1}{s^2}$	-2 / -2	-2 / -2	-2 / -2
$\frac{1}{(1-2s)}$	0 / 0	-1 / +1	-1 / +1
TOTAL	-2 / -4	-2 / +2	-1 / -1

Si



Cal moure els eixos ωtall (Fets en fluix)



2/3

$\omega_{tall} = 5{,}35$ rad/s $\longrightarrow |G| = 1$ i $\varphi = -121{,}27^\circ$ ✓

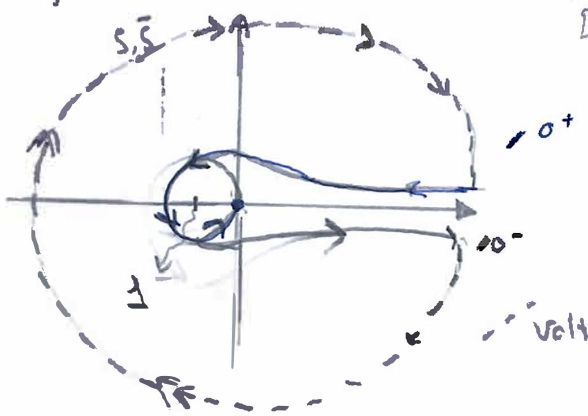
$\omega_{180} = 1{,}5$ rad/s $\rightarrow |G| = 5{,}5\overline{5}$ i $\varphi = 180^\circ$ ✓

El guany en continu, per $\omega = 0$ és ∞ ✓

Pel que fa ω_r i Mp no en te, igual que ample de banda ✓

1/1 ↓

Nyquist



Doble pol en 0 → 2 mitja volta horaria

Rang de Kp?

El 1 queda envoltat per una volta anti-horaria ✓

$N = -1 \quad P = 1 \rightarrow Z = 0$

1/1,5

És estable

Routh

Sistema en llaç tancat

$$\frac{\dfrac{K_p(0,5+S)(10+5s)}{s^2(-0,5+s)}}{1+\dfrac{K_p(0,5+S)(10+5s)}{s^2(-0,5+s)}}$$

$$G(s) = \frac{K_p(0,5+s)(10+5s)}{s^2(-0,5+s)+K_p(0,5+s)(10+5s)}$$

$$-s^2 \cdot 0,5 + s^3 + K_p\left(5+\frac{5}{2}s+10s+5s^2\right)$$

$$s^3 + (5K_p - 0,5)s^2 + \left(\frac{5}{2}+10\right)K_p s + 5K_p$$

s^3	1	$\left(\frac{5}{2}+10\right)K_p$ (12,5)
s^2	$5K_p - 0,5$	$5K_p$
s	$[\,]$	0
s^0	K	

$$[\,] = \frac{12,5K_p \cdot (5K_p - 0,5) - 5K_p}{5K_p - 0,5} = \frac{-\det\begin{pmatrix} 1 & 12,5K_p \\ 5K_p - 0,5 & 5K_p \end{pmatrix}}{5K_p - 0,5}$$

$\boxed{K_p > 0,9}$

$\boxed{K_p < 10}$

~~$0,9 < K_p < 10$~~

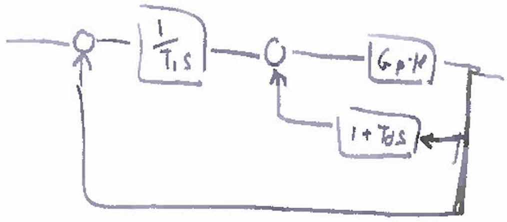
0/0,5

2/2

$$0{,}25 / 3$$

$$G_p = \frac{(s+10)}{(s+0{,}2)}$$

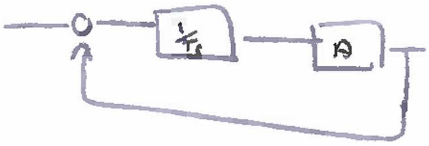
$$\frac{K_p(s+10)}{(s+0{,}2)}$$ ✓



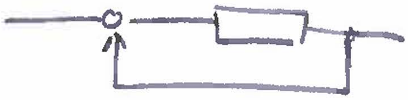
$$A = \frac{\frac{K_p(s+10)}{(s+0{,}2)}}{1+\frac{(1+T_d s)\cdot(s+10)K_p}{(s+0{,}2)}} = \frac{K(s+10)}{(s+0{,}2)+(1+T_d s)(s+10)K_p}$$

me l'he deixat!! aquí esta l'error de calcul

0,25



$$\frac{K_p(s+10)}{T_i s(s+0{,}2)+(1+T_d s)(s+10)K_p} =$$



Fdt en llaç tancat

$$\frac{K_p(s+10)}{K_p(s+10)+T_i s(s+0{,}2)+(1+T_d\cdot s)(s+10)K_p} \rightsquigarrow \frac{K_p(s+10)}{T_i+T_d}$$

NO!

sistema de 3er ordre!

$$K_p\cdot s + K_p\cdot 10 + T_i s^2 + T_i\cdot 0{,}2\cdot s + s + 10 + T_d\cdot s^2 + 10T_d\cdot s$$

$$s^2(T_i+T_d) + s(K_p + T_i\cdot 0{,}2 + 10T_d) + (K_p\cdot 10 + 10)$$

$$\boxed{(s^2+2s+3{,}94)(s+5)}$$

$$s^2 + s\,\frac{(K_p+T_i\cdot 0{,}2+10T_d)}{T_i+T_d} + \frac{(K_p\cdot 10+10)}{T_i+T_d} = s^2+2\xi\omega s+\omega^2$$

$$0{,}16 = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Rightarrow \boxed{\xi = 0{,}504}$$ ✓

$$t_s = \frac{4}{\omega_n\xi} \Rightarrow \boxed{\omega_n = 1{,}98\ rad/s}$$ ✓

0,25

Els pols

$$S_{1,2} = -1 \pm 1{,}714j$$

$$S_3 = -5\omega\xi = -5$$

o més

ha de ser >10!

dominancia de pols

$$\frac{b}{a} \geq 5$$

②

$(s+5)(s^2 + s + \quad)$

$$\frac{(K_p + 0{,}2T_i + 10T_d)}{T_i + T_d} = 2$$

$$\frac{(10K_p + 10)}{T_i + T_d} = 3{,}94 = \omega_n^2$$

Ha de tenir el mateix comportament en $t = \infty$

$$G_p(s) = \frac{(s+10)}{(s+0{,}2)} \rightarrow 50$$

NO!

$$\frac{K_p(10)}{T_D + T_i} = 50$$

$$K_p = 5(T_D + T_i)$$

$$\frac{50(T_D + T_i) + 10}{T_D + T_i} = 3{,}94 \rightarrow 50T_D + T_i + 10 = 3{,}94T_D + 3{,}94T_i$$

$$T_i = \left(\frac{46{,}06T_D + 10}{2{,}94}\right)$$

$$K_p = 5\left(T_D + \frac{46{,}06 T_D + 10}{2{,}94}\right)$$

$T_d = -0{,}186$ hi ha un error de càlcul

$T_i = 0{,}484$

$K_p = 4{,}84$

↳ m'he deixat una K_p :(

He ha intentat arreglar

Problema 3.2

$Mp = 0 \rightarrow \boxed{\xi = 1}$

$T_s = 4 \rightarrow \boxed{w_n = 1 \text{ rad/s}}$

$Kp(s+10) + T_i \cdot s(s+0{,}2) + Kp(s+Td s^2 +$

$10 + 10Td s$

0,26 / 1

$$\boxed{s^2(K_p Td + T_i) + s(Kp + T_i \cdot 0{,}2 + Kp + 10 K_p Td) + K_p \cdot 20}$$

NO! 3er ordre

denominador

$$s^2 + s\frac{(2Kp + T_i \cdot 0{,}2 + 10KpTd)}{Td + T_i} + \frac{Kp \cdot 20}{Td + T_i}$$

pols $S_{1,2} = \pm 1$

$S_3 = -5$

$(s+5)(s^2 + s \cdot 2 + 1) \rightarrow$ nou denominador

assignació de pols

$$w_n^2 = \boxed{\frac{Kp20}{Td + T_i} = 1} \qquad \boxed{2 w_n \xi = \frac{(2Kp + T_i \cdot 0{,}2 + 10K_p Td)}{Td + T_i}}$$

Falta aillar: Trobar Kp, T_i, T_D

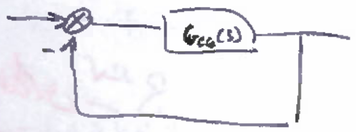
el mateix que a l'apartat anterior

B

$$G_p(s) = \frac{(s+10)}{(s+a)^2}$$

0/0,5

Precisió



$$G_{eq}(s) = \frac{K_p(s+10)}{[\,\cdots\,]}$$

↳ fet a apartats anteriors

$$e = \lim_{s\to 0} E(s)\cdot s \;\frac{1}{1+G_{eq}(s)} =$$

Graó $\quad E = \frac{1}{s}$

$$e = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\dfrac{K_p(s+10)}{s^2(T\cancel{K_p}T_d)+s(2K_p+\cdots)+20K_p}} = \frac{1}{1+\dfrac{10\cancel{K_p}}{20\cancel{K_p}}} = \frac{2}{3}$$

0 $\quad$ 0 $\quad$ és igual sera 0

No! és un sistema de tipus 1!

Rampa $\quad E = \frac{1}{s^2}$

$$e = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\cdot\frac{1}{s^{\cancel{2}}} \cdot \frac{1}{1+G_{eq}} = 0 \to \frac{1}{\infty}$$

Parabola $\quad E = \frac{1}{s^3}$

$$e = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\cdot\frac{1}{s^{\cancel{3}\,2}} \cdot \frac{1}{1+G_{eq}} = 0 \to \frac{1}{\infty}$$

4. **(2 punts)** Donada la funció de transferència en llaç obert següent:

$$GH(s) = \frac{K(s+10)}{s(0.5s+1)} e^{-0.01s}$$

4.1. Per K=1, determineu el marge de guany i marge de fase de GH(s).

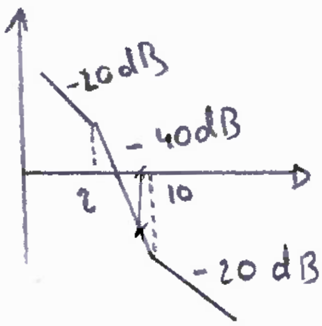
4.2. Calculeu el valor de K que faci que el sistema tingui un marge de guany de 16dB.

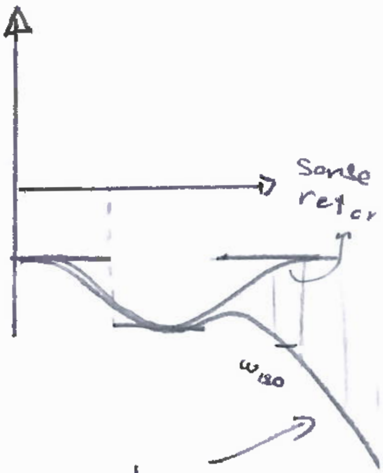
$$\frac{(s+10)}{s(0,5s+1)} e^{-0,01s} \rightarrow \frac{10(\frac{s}{10}+1)}{s(0,5s+1)} e^{-0,01s}$$

$\frac{s}{2}$

0,707/2

	0 – 2	2 – 10	10 – ∞
10	0 / 0	0 / 0	0 / 0
$\frac{s}{10}+1$	0 / 0	0 / 0	+1 / +1
$\frac{1}{s}$	-1 / -1	-1 / -1	-1 / -1
$\frac{1}{0,5s+1}$	0 / 0	-1 / -1	-1 / -1
Total	-1 / -1	-2 / -2	-1 / -1





$\omega_{tall} = 4,45$ rad/s $|G| = 1$ $\varphi = -590,75°$ MF = ~~410,75°~~

No!

omb retard (el bo)

$\varphi = \arctan(\frac{\omega}{10}) - \arctan(\frac{\omega}{2}) - 90 - 0,01 \cdot \frac{180}{\pi} \cdot \omega$

$\omega_{180} = 155$ rad/s $\rightarrow |G| = 0,0137 \rightarrow$ MG = ~~-17,72~~ dB

No! ?!

No!

$16 = 20\log(x) \rightarrow x = 0,158 = |G^*|$

$|G| \cdot K = |G^*|$ $\boxed{K = 12,15}$ com s'ha calculat?!

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

2/2

EXAMEN FINAL DE CONTROL AUTOMÀTIC

Grau en Enginyeria en Tecnologies Aeroespacials
Grau en Enginyeria en Vehicles Aeroespacials
Dilluns 18 de Gener de 2021 a les 18:00 hores

La durada total de l'examen és de 2:30 hores i la puntuació és sobre 10.

Primera Part: SENSE APUNTS

Nom i Cognoms de l'estudiant: ___

1. **(2 punts)** Es vol fer un control del motor de corrent continu del laboratori. S'ha identificat el sistema i la funció de transferència que relaciona l'entrada al driver amb la sortida a la tacodinamo és $G(s) = 0.89 / (0.12s + 1)$. La tacodinamo es pot considerar com una constant $K_t = 0.007$ V / rpm.

1.1. Si es fa el control en llaç obert quina entrada necessitarem per tal que el motor giri a 1000 rpm?

1.2. Quin serà el temps d'establiment amb el criteri del 2%.

1.3. Es tanca el llaç amb un controlador proporcional per reduir el temps d'establiment a 0.1s. Quin serà el valor mínim de la constant Kp per complir l'especificació?

1.4. Quina serà la consigna en llaç tancat?

1.1 sortida de la tacodinamo: $C(\infty) = 1000 \cdot 0{,}007 = 7\,V$

$$A \cdot K = C(\infty) \longrightarrow A = \frac{C(\infty)}{K} = \frac{7}{0{,}89} = \boxed{7{,}865\ V}$$

1.2. Criteri del 2% $\longrightarrow 4\tau$

$$t_s = \cancel{T_0}^{0} + 4\tau = 4 \cdot 0{,}12 = \boxed{0{,}48\ s}$$

1.3. $4\tau \leq 0{,}1\ s \longrightarrow \tau \leq 0{,}025$

$$G_{LT}(s) = \frac{K_p\,G(s)}{1 + K_p\,G(s)} = \frac{\frac{0{,}89K_p}{0{,}12s+1}}{1 + \frac{0{,}89K_p}{0{,}12s+1}} = \frac{0{,}89K_p}{0{,}12s + 1 + 0{,}89K_p} = \frac{\frac{0{,}89K_p}{0{,}89K_p+1}}{\frac{0{,}12}{0{,}89K_p+1}s + 1}$$

$$\tau = \frac{0{,}12}{0{,}89K_p + 1} \leq 0{,}025 \longrightarrow \boxed{K_p \geq 4{,}270}$$

1.4. Agafant $K_p = 4{,}27$, guany estàtic $|K| = \frac{0{,}89 \cdot K_p}{0{,}89\,K_p + 1} = 0{,}792$

$$A \cdot K = C(\infty) \longrightarrow A = \frac{C(\infty)}{K} = \frac{7}{0{,}792} = \boxed{8{,}842\ V}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

$\frac{1,25}{3}$ + $\frac{0,75}{3}$ + $\frac{2}{2}$

EXAMEN FINAL DE CONTROL AUTOMÀTIC

Grau en Enginyeria en Tecnologies Aeroespacials
Grau en Enginyeria en Vehicles Aeroespacials
Dilluns 18 de Gener de 2021 a les 18:00 hores

La durada total de l'examen és de 2:30 hores i la puntuació és sobre 10.

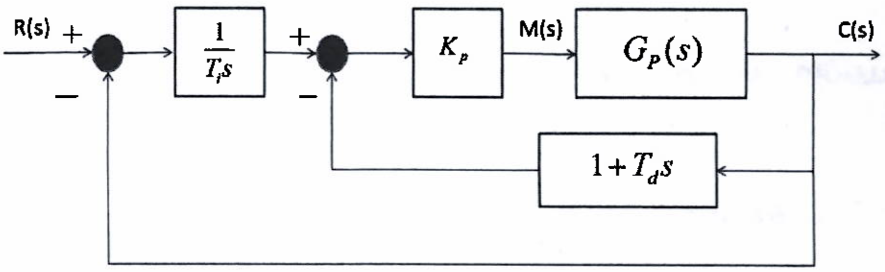
Nom i Cognoms ______

2. **(3 punts)** qual es coneix la

$$C(s)G(s)=\frac{K_p(0.5+s)(10+5s)}{s^2(-0.5+s)}$$

2.1. Per a Kp=1, determineu el diagrama freqüencial de Bode i especifiqueu quines son les característiques del sistema en llaç obert: guany en continu, pulsació de tall, pulsació de ressonància, pic de ressonància i ample de banda.
2.2. Per a Kp=1, analitzeu pel mètode de Nyquist l'estabilitat del sistema en llaç tancat. Determineu l'interval de Kp que fa estable el sistema en llaç tancat.
2.3. Comproveu pel mètode de Routh els resultats de l'apartat precedent.

3. **(3 punts)** Donat el sistema de control de la figura següent



$$G_P(s)=\frac{(s+10)}{(s+0.2)}$$

3.1. Determineu els valors de Kp, Ti i Td de tal forma que la resposta del sistema realimentat sigui estable amb un temps d'establiment de 4 segons i un sobreimpuls (overshoot) del 16%.
3.2. Determineu els valors de Kp, Ti i Td per aconseguir una resposta critica de segon ordre ("overshoot" percentual MP=0%) i un temps d'estabilització de 4 segons.
3.3. Determineu quina és la precisió del sistema davant d'un graó, una rampa i una paràbola unitaris.

18/01/2021

Examen final Control Automàtic

Problema 2

2.1 $$C(s)G(s) = \frac{K_p(0,5+s)(10+5s)}{s^2(-0,5+s)} = \frac{-10K_p\underbrace{(2s+1)}_{\omega=0,5}\underbrace{(0,5s+1)}_{\omega=2}}{s^2\underbrace{(-2s+1)}_{\omega=0,5}}$$

Fem la taula:

	0	0,5	2	∞
$-10K_p$	0/-2	0/-2	0/-2	
$(2s+1)$	0/0	1/1	1/1	
$(0,5s+1)$	0/0	0/0	1/1	
s^{-2}	-2/-2	-2/-2	-2/-2	
$(-2s+1)^{-1}$	0/0	-1/-1	-1/$\cancel{-1}$	
TOTAL	-2/-4	-2/-4	-1/$\cancel{-3}$	

BNO

Per saber el punt de partida en el mòdul, mirem el mòdul per $\omega = 0,5$.

$|C(0,5)G(0,5)| = 10\sqrt{17} \longrightarrow$ en dB: 32,304 dB

$|K| = 32,302 + 4 \cdot 0,5 = \boxed{\cancel{34,304\text{ dB}}} \longrightarrow$ guany en continu NO

pulsació de tall: ω quan $|C(\omega)G(\omega)| = 1$

$$\frac{10\sqrt{(2\omega)^2+1}\sqrt{(0,5\omega)^2+1}}{\omega^2\sqrt{(2\omega)^2+1}} = 1 \longrightarrow \boxed{\omega = 5,339 \text{ rad/s}}$$ ✓

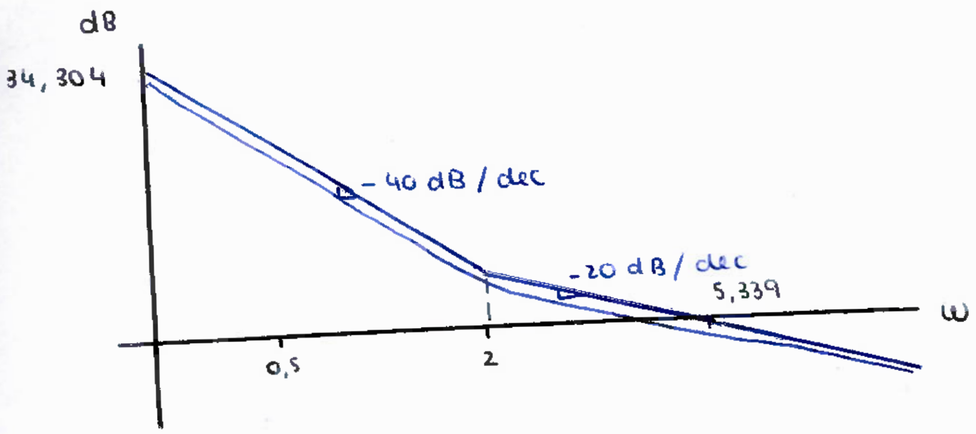
No té pulsació de ressonància ni pic de ressonància perquè tots els pols son reals.

Ample de banda: ω quan el mòdul ha disminuït 3 dB.

34,304 − 3 = 31,304 dB

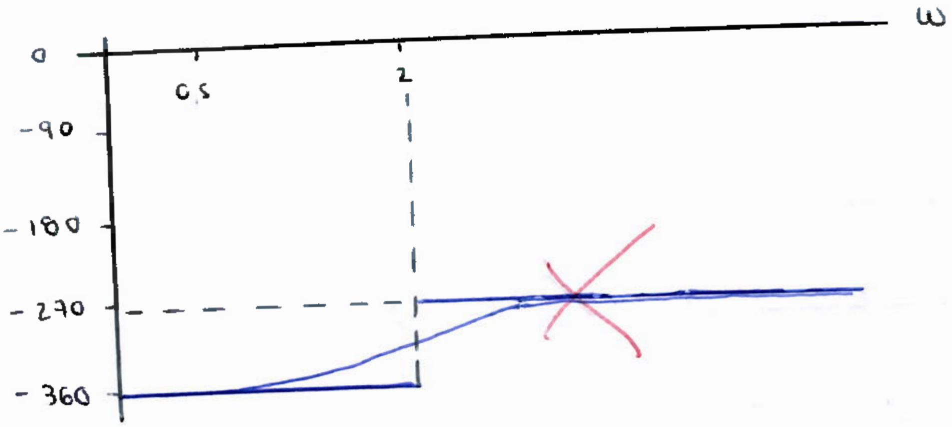
$$31,304\text{ dB} = 20\log\left(\frac{10\sqrt{(2\omega)^2+1}\sqrt{(0,5\omega)^2+1}}{\omega^2\sqrt{(2\omega)^2+1}}\right) \longrightarrow \boxed{\cancel{\omega = BW = 0,331 \text{ rad/s}}}$$

Bode mòdul



0,5/1

Bode fase

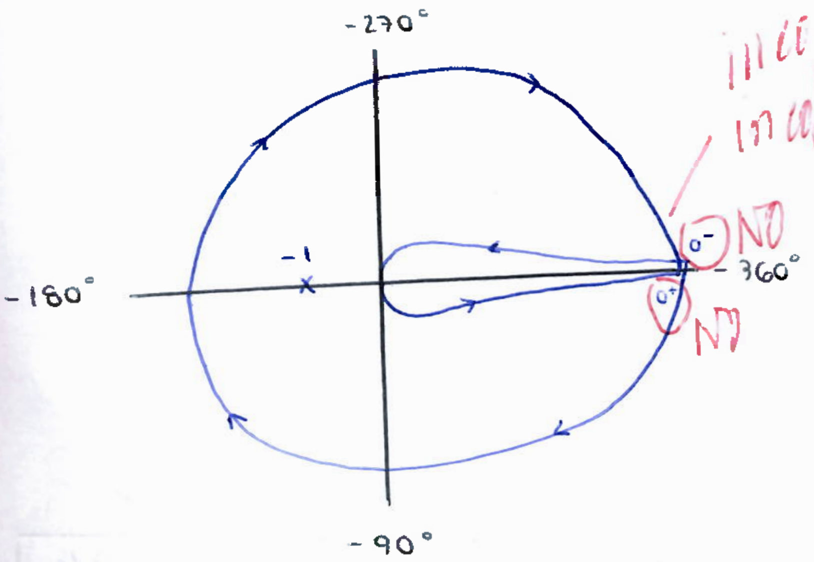


2.2. Nyquist punts importants:

$\omega \to \infty$, $|C(\omega)G(\omega)| = 0$

$\varphi = -360°$, $\omega = 0$ rad/s, $|C(\omega)G(\omega)| = \infty$

0,5/1,5



incorrecte

incoherent

2 integradors puis, 2 mitges voltes en sentit horari

sistema estable si $z = N + P =$ [illegible]

$N = 1$

$P = 1$

$z = 1 + 1 = 2 \neq$ [illegible]

sistema inestab[illegible]

continuació problema 2

$$G_{LT}(s) = \frac{C(s)\,G(s)}{1 + C(s)\,G(s)} = \frac{10K_p(2s+1)(0,5s+1)}{2s^3 + (10K_p - 1)s^2 + 25K_p s + 10K_p}$$

2.3 Condició necessària: tots els termes de Pc $\neq 0$ i del mateix signe. Per tant, $10K_p - 1 > 0 \longrightarrow K_p > 0,1$

Condició suficient: la columna tota positiva.

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 2 & 25K_p \\ s^2 & 10K_p - 1 & 10K_p \\ s^1 & \dfrac{250K_p^2 - 45K_p}{10K_p - 1} & \\ s^0 & \dfrac{2500K_p^2 - 450K_p}{10K_p - 1} & \end{array}$$

$$\frac{250K_p^2 - 45K_p}{10K_p - 1} > 0$$

$\hookrightarrow \boxed{K_p > 0,18}$

$\frac{0,5}{0,5}$

$\boxed{\frac{1,25}{3}}$

Problema 3

0,20/3

3.1 $G_{LT_1}(s) = \dfrac{K_p\, G_p(s)}{1 + K_p\, G_p(s) H(s)} = \dfrac{\dfrac{K_p(s+10)}{(s+0,2)}}{1 + K_p(1+T_d s)\left(\dfrac{s+10}{s+0,2}\right)}$

$$G_{LT_1}(s) \cdot \frac{1}{T_i s} = \frac{K_p(s+10)}{T_i s\,(s+0,2+K_p(1+T_d s)(s+10))}$$

$$G_T(s) = \frac{G_{LT_1}(s)\cdot \frac{1}{T_i s}}{1 + G_{LT_1}(s)\cdot\frac{1}{T_i s}} = \frac{K_p(s+10)}{T_i s\,(s+0,2+K_p(1+T_d s)(s+10)) + K_p(s+10)}$$

$$M_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0,16 \longrightarrow \xi = 0,504$$

$$t_s = \frac{4}{\xi\,\omega_n} = 4 \longrightarrow \omega_n = 1,985 \text{ rad/s}$$

0,2b

0,2b/6,0

$$P_c = s^3 + \frac{1+K_p+10K_pT_d}{K_pT_d}s^2 + \frac{0,2T_i + 10K_pT_i + [redacted] + K_p}{K_pT_dT_i}s + \frac{10K_p}{K_pT_dT_i}$$

$K_pT_dT_i$ ✗

0,0

volem que sigui igual a:

$$(s+\alpha)(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2) = s^3 + (\alpha + 2\xi\omega_n)s^2 + (\omega_n^2 + 2\xi\omega_n)s + (\alpha\omega_n^2)$$

0,2b

$$\frac{1+K_p+10K_pT_d}{K_pT_d} = \alpha + 2\xi\omega_n$$

$$10K_p = \alpha\omega_n^2$$

$$\frac{0,2T_i + 10K_pT_i + [redacted] + K_p}{K_pT_dT_i} = \omega_n^2 + 2\xi\omega_n$$

Imposem $\alpha = |sRes_1| = 10 \cdot 1 = 10 \longrightarrow \underline{\underline{\alpha = 10}}$ No, ha de ser

Trobem:

$\boxed{K_p = 3,940.}$ ✗

$\boxed{T_d = 0,627}$

$T_i = -0,158$ ✗ ← no té sentit que sigui negativa, deu haver algun error de càlcul

~~Em donen T_d i T_i negatius, cosa que no té sentit~~

2/2

Problema 4

4.1 Marge de guany : dB quan $\varphi = -180^\circ$

$$-180^\circ = -90 - 0{,}01\,\omega \cdot \frac{180}{\pi} + \arctan(0{,}1\omega) - \arctan(0{,}5\omega)$$

$\hookrightarrow \omega = 151{,}820$ rad/s

mòdul per $\omega = 151{,}820$ rad/s $\longrightarrow |GH(s)| = 0{,}013$

$$MG = -20 \log 0{,}013 = \boxed{37{,}588 \text{ dB}}$$

Marge de fase : φ quan 0 dB.

$$\varphi = 180 + \measuredangle G(\omega)$$

$$|GH(s)| = \frac{10\sqrt{(0{,}1\omega)^2+1}}{\omega\sqrt{(0{,}5\omega)^2+1}} = 1 \longrightarrow \omega = 4{,}472 \text{ rad/s}$$

$$\measuredangle G(\omega) = -90 - 0{,}01 \cdot 4{,}472 \cdot \frac{180}{\pi} + \arctan(0{,}1 \cdot 4{,}472) - \arctan(0{,}5 \cdot 4{,}472)$$

$$\measuredangle G(4{,}472) = -134{,}373^\circ$$

$$MF = 180 - 134{,}373^\circ = \boxed{45{,}627^\circ}$$

4.2 $MG = -20 \log x = 16 \longrightarrow x = 0{,}158$

Per $\omega = 151{,}820$ rad/s , el mòdul ha de ser de 0,158

$$\frac{10K \cdot \sqrt{(0{,}1 \cdot 151{,}82)^2+1}}{151{,}82\sqrt{(0{,}5 \cdot 151{,}82)^2+1}} = 0{,}158 \longrightarrow \boxed{K = 12}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

2/2

EXAMEN FINAL DE CONTROL AUTOMÀTIC

Grau en Enginyeria en Tecnologies Aeroespacials
Grau en Enginyeria en Vehicles Aeroespacials
Dilluns 18 de Gen...

).

Nom i C

1. **(2 pu** ... motor de corrent continu del laboratori. S'ha identi... i la funció de transferència que relaciona l'entrada al driver amb la sortida a la tacodinamo és $G(s) = 0.89 / (0.12s + 1)$. La tacodinamo es pot considerar com una constant $K_t = 0.007$ V / rpm.

1.1. Si es fa el control en llaç obert quina entrada necessitarem per tal que el motor giri a 1000 rpm?
1.2. Quin serà el temps d'establiment amb el criteri del 2%.
1.3. Es tanca el llaç amb un controlador proporcional per reduir el temps d'establiment a 0.1s. Quin serà el valor mínim de la constant Kp per complir l'especificació?
1.4. Quina serà la consigna en llaç tancat?

$G(s) = \dfrac{0{,}89}{0{,}12s+1}$; Tacodinamo : $K_t = 0{,}007\ V/rpm$

1.1 Control en LO → $1000\ rpm \cdot 0{,}007\ V/rpm = 7\ V$ (Sortida)

$K = 0{,}89 = \dfrac{Sortida}{Entrada}$; $\boxed{Entrada} = \dfrac{7V}{0{,}89} = \boxed{7{,}865\ V}$

1.2 $\boxed{t_s(2\%)} = 4\tau = 4 \cdot 0{,}12 = \boxed{0{,}48 s}$

1.3 Volem reduir el $t_s(2\%) = 0{,}1 s$ → Valor mínim de Kp per complir l'especificació?

$$G_{LT} = \dfrac{\dfrac{0{,}89 \cdot Kp}{0{,}12s+1}}{1+\dfrac{0{,}89 \cdot Kp}{0{,}12s+1}} = \dfrac{0{,}89 \cdot Kp}{0{,}12s+(1+0{,}89 \cdot Kp)} = \dfrac{\dfrac{0{,}89 \cdot Kp}{1+0{,}89 \cdot Kp}}{\dfrac{0{,}12}{1+0{,}89 \cdot Kp}s+1}$$

$$t_s(2\%) = 4\tau = \dfrac{4 \cdot 0{,}12}{1+0{,}89 \cdot Kp} = 0{,}1 s \rightarrow \boxed{Kp = 4{,}27}$$

$\underline{1.4}$ Consigna en LT :

$$G_{LT} = \frac{0{,}792}{0{,}025s + 1}$$

Per aconseguir 1000 rpm → $1000\ rpm \cdot 0{,}007\ V/rpm = 7V$ → $\boxed{Entrada} = \frac{7V}{0{,}792} = \boxed{8{,}83\ V}$

(Sortida)

↑ Consigna.

$\frac{2,75}{3} + \frac{1,75}{3} + \frac{2}{2}$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

EXAMEN FINAL DE CONTROL AUTOMÀTIC

Grau en Enginyeria en Tecnologies Aeroespacials
Grau en Enginyeria en Vehicles Aeroespacials
Dilluns 18 de Gener de 2021 a les 18:00 hores

La durada total de l'examen és de 2:30 hores i la puntuació ... obre 10.

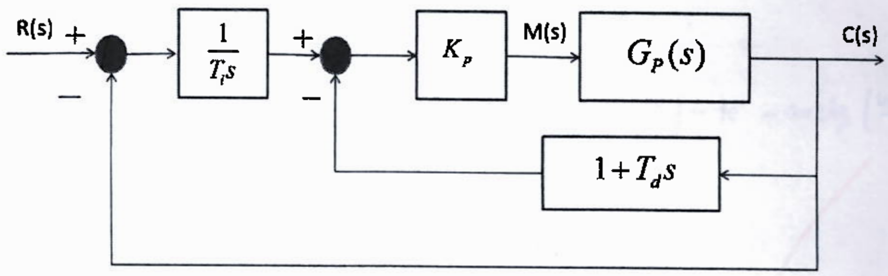
Nom i C ...

2. (... icat del qual es c...

$$C(s)G(s) = \frac{\ldots}{s^2(-0.5+s)}$$

2.1. Per a Kp=1, determineu el diagrama freqüencial de Bode i especifiqueu quines son les característiques del sistema en llaç obert: guany en continu, pulsació de tall, pulsació de ressonància, pic de ressonància i ample de banda.
2.2. Per a Kp=1, analitzeu pel mètode de Nyquist l'estabilitat del sistema en llaç tancat. Determineu l'interval de Kp que fa estable el sistema en llaç tancat.
2.3. Comproveu pel mètode de Routh els resultats de l'apartat precedent.

3. **(3 punts)** Donat el sistema de control de la figura següent



$$G_p(s) = \frac{(s+10)}{(s+0.2)}$$

3.1. Determineu els valors de Kp, Ti i Td de tal forma que la resposta del sistema realimentat sigui estable amb un temps d'establiment de 4 segons i un sobreimpuls (overshoot) del 16%.
3.2. Determineu els valors de Kp, Ti i Td per aconseguir una resposta critica de segon ordre ("overshoot" percentual MP=0%) i un temps d'estabilització de 4 segons.
3.3. Determineu quina és la precisió del sistema davant d'un graó, una rampa i una paràbola unitaris.

4) FdT en LO (llaç obert): $GH(s) = \dfrac{K(s+10)}{s(0{,}5s+1)} e^{-0{,}01s}$

2/2

<u>4.1</u> Per $K=1 \rightarrow GH(s) = \dfrac{(s+10)}{s(0{,}5s+1)} e^{-0{,}01s}$

$MG = \left[0 - |GH(j\omega_{MG})|_{dB}\right] \rightarrow \omega_{MG}$ és aquella per la qual $\angle\left[GH(j\omega_{MG})\right] = \pm 180°$

$$\angle\left[GH(j\omega)\right] = \operatorname{arctg}(\omega/10) - \underbrace{\operatorname{arctg}(\infty)}_{\substack{90° \\ \text{(integrador)}}} - \operatorname{arctg}(\omega/2) - \underbrace{0{,}01\,\omega\,\frac{180}{\pi}}_{\text{retard}}$$

Amb la calculadora i l'expressió anterior trobem ω_{MG} fent $\angle\left[GH(j\omega_{MG})\right] = -180° \rightarrow \omega_{MG} = 151{,}82$ rad/s

Per tant, amb $|GH(j\omega)| = \dfrac{\sqrt{\omega^2+100}}{\omega\sqrt{0{,}25\omega^2+1}} \rightarrow |GH(j\omega_{MG})|_{dB} = 20\log_{10}\left(\dfrac{\sqrt{\omega_{MG}^2+100}}{\omega_{MG}\sqrt{0{,}25\omega_{MG}^2+1}}\right) = -37{,}59$ dB

$\boxed{MG = 37{,}59\text{ dB}}$

2,77/3

ω_{MF} és aquella per la qual $|GH(j\omega_{MF})| = 1$ (el mateix que 0 dB si el mòdul fos en dB)

$1 = \dfrac{\sqrt{\omega_{MF}^2+100}}{\omega_{MF}\sqrt{0{,}25\omega_{MF}^2+1}} \rightarrow \omega_{MF} = 4{,}47$ rad/s

$\rightarrow \angle\left[GH(j\omega_{MF})\right] = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\omega_{MF}}{10}\right) - 90° - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\omega_{MF}}{2}\right) - 0{,}01\,\omega_{MF}\,\dfrac{180}{\pi}$; ⊛

⊛ $\angle\left[GH(j\omega_{MF})\right] = -134{,}37° < 0$

$\rightarrow \boxed{MF = 180° - 134{,}37° = 45{,}53°}$

<u>4.2</u>

Valor de K per tenir un MG = 16 dB:

$K_1 = 1 \rightarrow MG_1 = 37{,}59$ dB
$K_2 = ? \rightarrow MG_2 = 16$ dB

$\}\rightarrow$ La K, com que és una ct, no afecta la fase, per tant $\omega_{MG1} = \omega_{MG2} = 151{,}82$ rad/s

Així doncs, $MG_1 - MG_2 = -20\log_{10}\left(\dfrac{K_1\sqrt{\omega_{MG1}^2+100}}{\omega_{MG1}\sqrt{0{,}25\,\omega_{MG1}^2+1}}\right) + 20\log_{10}\left(\dfrac{K_2\sqrt{\omega_{MG2}^2+100}}{\omega_{MG2}\sqrt{0{,}25\,\omega_{MG2}^2+1}}\right)$

$MG_1 - MG_2 = 20\log_{10}\left(\dfrac{K_2\cancel{\sqrt{\omega_{MG2}^2+100}}}{\cancel{\sqrt{\omega_{MG1}^2+100}}\,K_1}\right)$; Amb $K_1 = 1 \rightarrow$

$10^{(MG_1-MG_2)/20} = K_2 = 12 \rightarrow \boxed{K_2 = K = 12}$

4,25 / 3

② Volem estudiar estabilitat en LT (llaç tancat).

FdT en LO: $C(s)\,G(s) = \dfrac{K_p(0,5+s)\,(10+5s)}{s^2(-0,5+s)}$

2.1 $K_p = 1 \rightarrow$ Fer els Bode i especificar les característiques del sistema en LO.

$$C(s)\,G(s) = \frac{(0,5+s)\,(10+5s)}{s^2(-0,5+s)} = \frac{0,5\cdot 10\,(s/0,5+1)\,(s/2+1)}{-0,5\; s^2\,(-s/0,5+1)} = \frac{-10\,(2s+1)\,(s/2+1)}{s^2\,(-2s+1)}$$

Sistema de fase NO mínima

Fem la taula de Mondragon

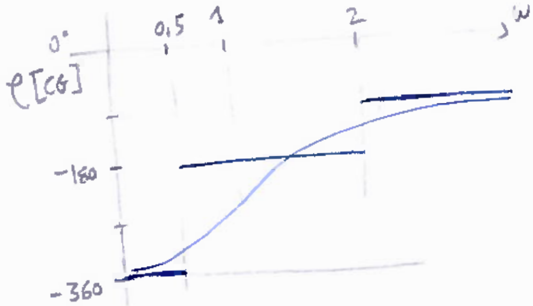
	0 rad/s	0,5	2
-10	0/-2	0/-2	0/-2
$(2s+1)^2$	0/0	1/1	1/1
$1/s^2$	-2/-2	-2/-2	-2/-2
$1/(-2s+1)$	0/0	-1/1	-1/1
$(s/2+1)$	0/0	0/0	1/1
Total	-2/-4	-2/-2	-1/-1
	-40dB/-360°	-40dB/-180°	-20dB/-90°

✓

Punt inici: $\omega = 0,1$ rad/s $\rightarrow 20\log_{10}\left(\dfrac{+10\sqrt{4\omega^2+1}\,\sqrt{\omega^2/4+1}}{\omega^2\sqrt{4\omega^2+1}}\right) = 60$

Bode Mòdul → Full següent (semilog)

Bode Fase



✓

0,75 / 1

Guany en continu $\approx$ ~~60,01 dB~~ (punt d'inici) → $\omega = 0,1$ rad/s (molt petita) ∞

$\omega_{Tall} \Rightarrow \omega$ quan $|CG|_{dB} =$ ~~-3dB~~ no → Dibuix al Bode aproximat ; ~~$\omega_{TALL}(-3dB) \cong 6,5$ rad/s~~ 5 rad 0dB!

$\omega_R = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \rightarrow$ No n'hi ha ; Pic de ressonància → No hi ha

Ressonància

Ample banda → No existeix

2.2 Per $K_p = 1$, analitzar l'estabilitat en LT mitjançant el criteri de Nyquist i determinar interval de Kp que fa estable el sistema en LT.

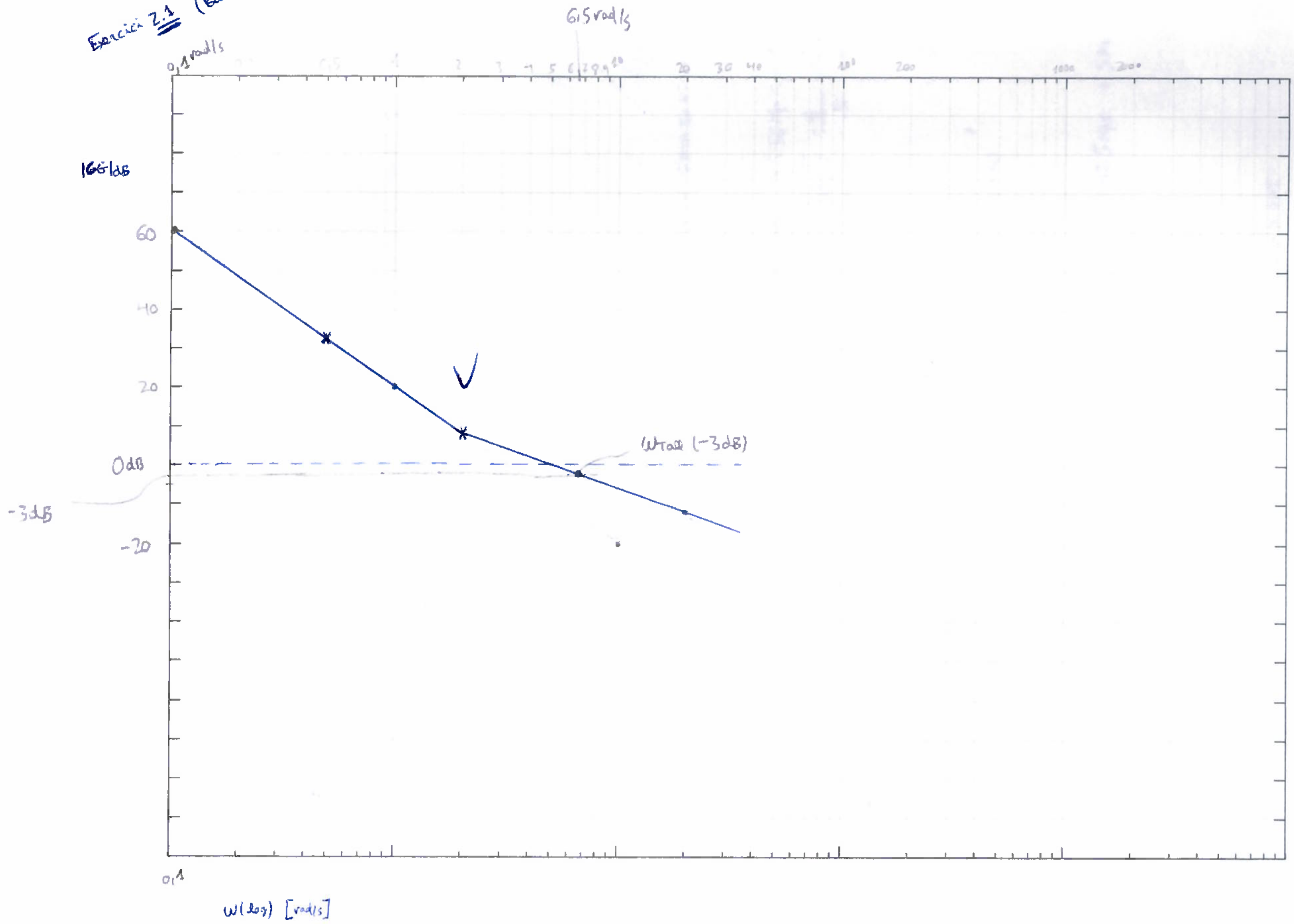
Amb les fases de la taula de Mondragon calculem (dibuixem) el Nyquist.

Necessitem $|CG(j\omega)|$ per ω que fa $\varphi[CG(j\omega)] = -180°$

$\rightarrow \varphi[CG(j\omega)] = -180° + \arctg(2\omega) + \arctg(\omega/2) - \overbrace{2\arctg(\omega)}^{180°} - \arctg(-2\omega)$ → (Full s

FINAL CA
(2)

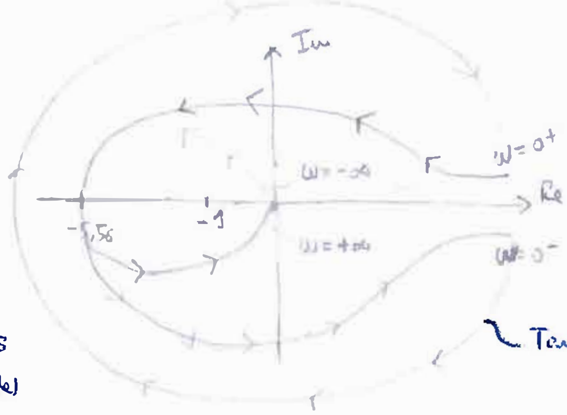
Exercici 2.1 (Bode Mòdul)



ω per $\angle[CG(j\omega)] = -180°$ → Amb calculadora: $\omega = 1,5$ rad/s (mirant el Bode té sentit)

$$|CG(j\omega)| = \frac{10\sqrt{\omega^2/4+1}}{\omega^2} \rightarrow \text{Per } \omega = 1,5 \text{ rad/s} \rightarrow |CG(j\omega)| = 5,56$$

Fases:
- Inici $= -360° \equiv 0°$
- Intermig $= -180°$
- Final $= -90°$



$\omega = 1,5$ rad/s → $|CG(j\omega)|_{dB} \cong 15$ dB (de Bode)

Tanquem en sentit horari

$$20\log_{10}(|CG(j\omega)|) = 15 \text{ dB} \rightarrow |CG(j\omega)| = 5,62$$

~~$\angle = -90°$ → $\omega =$ rad/s → $|CG(j\omega)| =$~~

1 volta antihorària

1,5

1,5

Criteri de Nyquist: $Z = N + P$

P: pols inestables de $CG(j\omega) = 1$

N: voltes al voltant del -1 al Nyquist ($\oplus$; $\ominus$)

$Z = -1 + 1 = 0$ → Sistema ESTABLE en LT.

Interval K_p perquè sigui estable: $-5,56K_p < -1$; $\boxed{K_p > \frac{-1}{-5,56} = 0,18}$ ✓

2.3 Mètode Routh.

Necessitem el denominador de la FdT en LT (realimentació unitària negativa):

$$G_{LT}(s) = \frac{\frac{K_p(0,5+s)(10+5s)}{s^2(-0,5+s)}}{1+\frac{K_p(0,5+s)(10+5s)}{s^2(-0,5+s)}} = \frac{K_p(0,5+s)(10+5s)}{s^2(-0,5+s) + K_p(0,5+s)(10+5s)};$$

El denominador: $-0,5s^2 + s^3 + K_p(5 + 2,5s + 10s + 5s^2) = s^3 + s^2(5K_p - 0,5) + 12,5K_p s + 5K_p$

La condició de Routh → Tots els coeficients NO nuls i amb el mateix signe:

- $5K_p - 0,5 > 0 \longrightarrow K_p > \frac{+0,5}{5} = 0,1$
- $12,5K_p > 0$
- $5K_p > 0$

$12,5K_p > 0$ i $5K_p > 0$ → $K_p > 0$

De moment $K_p > 0,1$

Per la 2a condició necessitem la matriu de Routh:

$$s^3 + s^2(5K_p - 0{,}5) + 12{,}5K_p s + 5K_p$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 12{,}5K_p \\ s^2 & (5K_p - 0{,}5) & 5K_p \\ s^1 & \bigcirc & \\ s^0 & 5K_p & \end{array}$$

~~$12{,}5(5K_p-0{,}5)-5K_p$~~

$$\boxed{\frac{12{,}5K_p(5K_p - 0{,}5) - 5K_p}{(5K_p - 0{,}5)}} > 0 \rightarrow 62{,}5K_p^2 - 11{,}25K_p > 0$$

0,5/0,5

$K_p = 0$ (descartada

$62{,}5K_p - 11{,}25 > 0;$

2a condició : $\boxed{K_p > 0{,}18}$ V

(la primera columna ha de ser tota positiva si els coeficients del polinomi són positius).

③ Sistema de control de la figura.

1,75/3

3.1 Calculem la FdT del llaç petit (control PD):

$$G_{LT_{(1)}} = \frac{K_p G_P}{1 + K_p G_P(1 + T_d s)} = \frac{K_p \frac{(s+10)}{(s+0{,}2)}}{1 + K_p(1 + T_d \cdot s)\frac{(s+10)}{(s+0{,}2)}} = \frac{K_p(s+10)}{(s+0{,}2) + (K_p + K_p T_d \cdot s)(s+10)}$$

$$= \frac{K_p(s+10)}{s + 0{,}2 + K_p \cdot s + 10K_p + K_p T_d s^2 + 10K_p T_d s}$$

$$= \frac{K_p(s+10)}{K_p T_d s^2 + s(1 + K_p + 10K_p T_d) + 10K_p + 0{,}2}$$

0,75/1,5

Ara calculem tota la FdT en LT:

$$G_{LT} = \frac{\frac{1}{T_i s} G_{LT_1}}{1 + \frac{1}{T_i s} G_{LT_1}} = \frac{G_{LT_1}}{T_i s + G_{LT_1}} = \frac{\bigcirc}{T_i \cdot s + \frac{K_p(s+10)}{K_p T_d s^2 + s(1 + K_p + 10K_p T_d) + 10K_p + 0{,}2}}$$

$$= \frac{K_p(s+10)}{K_p T_d T_i s^3 + s^2 T_i(1 + K_p + 10K_p T_d) + s\left[10K_p T_i + 0{,}2T_i + K_p\right] + 10K_p}$$

El denominador obtingut l'igualarem al desitjat:

El dividim entre $K_p T_d T_i$ per igualar-lo.

Especificacions:

$$t_s(2\%) = 4\,s\ ;\ 4 = \frac{4}{\xi \omega_n} \rightarrow \omega_n = \frac{1}{\xi} = 2\,rad/s$$

$$M_p = 16\% = 0{,}16 \rightarrow \xi = \sqrt{\frac{(\ln(M_p))^2}{\pi^2 + (\ln(M_p))^2}} = 0{,}5$$

Per tant, el polinomi desitjat serà, afegint un pol adicional perquè el del control és de 3er ordre,:

$$(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s+a) = (s^2 + 2s + 4)(s+a) = s^3 + s^2(a+2) + s(2a+4) + 4a$$

Igualem els polinomis:

$$\begin{cases} a+2 = \dfrac{\cancel{Ti}(1+Kp+KpTd)}{KpTd\cancel{Ti}} \longrightarrow a=10,\ Kp=4 \longrightarrow \boxed{Td = 0{,}114} \\ 2a+4 = \dfrac{10KpTi + 0{,}2Ti + Kp}{KpTdTi} \longrightarrow a=10,\ Kp=4,\ Td=0{,}114 \longrightarrow \boxed{Ti = -0{,}137} \\ \dfrac{10Kp}{} = 4a \longrightarrow a=10 \longrightarrow \boxed{Kp=4} \end{cases}$$

X NO!

X $KpTiTd$ NO!

* Escollim a perquè sigui NO dominat (els altres pols dominin sobre ell)

$$\left.\begin{matrix} S_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}\,i \rightarrow \text{Part real } -1 \\ S_3 = -a \end{matrix}\right\} \quad \frac{+a}{+1} = 10 \rightarrow a = 10 \rightarrow$$ Els complexos conjugats seran dominants.

hauria de ser > 10

3.2

Volem ara una resposta crítica de 2on ordre amb $t_s(2\%) = 4s$

$\xi = 1$

$Mp = 0\%$

Polinomi desitjat $\longrightarrow t_s = 4 = \dfrac{4}{\xi w_n} = \dfrac{4}{w_n} \rightarrow w_n = 1\ rad/s \rightarrow s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2 = s^2+2s+1$

0,6 / 1

Afegim un pol: $(s^2+2s+1)(s+a)$

~~$s^3+s^2(a+2)+s(a+1)+a$~~

$s^3+s^2(a+2)+s(2a+1)+a$

Igualem denominadors:

$$\begin{cases} a+2 = \dfrac{1+Kp+KpTd}{KpTd} \longrightarrow a=10,\ Kp=1 \longrightarrow \boxed{Td = 0{,}182} \\ 2a+1 = \dfrac{10KpTi+0{,}2Ti+Kp}{KpTdTi} \longrightarrow a=10,\ Kp=1,\ Td=0{,}182 \longrightarrow \boxed{Ti = -0{,}157} \\ a = 10Kp \longrightarrow a=10 \longrightarrow \boxed{Kp=1} \end{cases}$$

X NO!

X NO!

* Escollim el pol a:

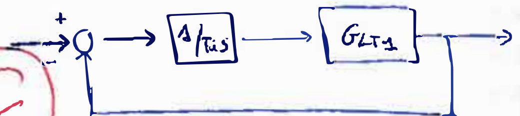
$$\left.\begin{matrix} s_{1,2} = -1 \text{ (doble)} \\ s_3 = -a \end{matrix}\right\} \quad \frac{+a}{+1} = 10 \rightarrow a = 10$$

3.3

Precisió davant graó, rampa i paràbola unitaris:

* full anterior

Transformant el llaç petit ens queda:



0,5

Graó: $\frac{1}{s} \rightarrow \boxed{Erp = 0}$ (comprovem)

$$Erp = \frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0} \frac{1}{Tis} G_{LT1}} = 0$$

Veiem que és un sistema de tipus 1 (1 integrador pur en LO)

Rampa: $\frac{1}{s^2} \rightarrow \boxed{Erp} = \dfrac{1}{Kv} = \dfrac{1}{\lim\limits_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{1}{Ti\cancel{s}} G_{LT1}} \neq \dfrac{1}{\dfrac{10Kp}{Ti(10Kp+0{,}2)}} = \boxed{\dfrac{Ti(10Kp+0{,}2)}{10Kp}}$

Paràbola: $\frac{1}{s^3} \rightarrow \boxed{Erp = \infty}$

2/2

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

EXAMEN FINAL DE CONTROL AUTOMÀTIC

Grau en Enginyeria en Tecnologies Aeroespacials
Grau en Enginyeria en Vehicles Aeroespacials
Dilluns 18 de Gener de 2021 a les 18:00 hores

La durada total de l'examen és de 2:30 hores i la puntuació és sobre 10.

Primera Part: SENSE APUNTS

Nom i Cognoms de l'estudiant: ________________

1. **(2 punts)** Es vol fer un control del motor de corrent continu del laboratori. S'ha identificat el sistema i la funció de transferència que relaciona l'entrada al driver amb la sortida a la tacodinamo és $G(s) = 0.89 / (0.12s + 1)$. La tacodinamo es pot considerar com una constant $K_t = 0.007$ V / rpm.

1.1. Si es fa el control en llaç obert quina entrada necessitarem per tal que el motor giri a 1000 rpm?
1.2. Quin serà el temps d'establiment amb el criteri del 2%.
1.3. Es tanca el llaç amb un controlador proporcional per reduir el temps d'establiment a 0.1s. Quin serà el valor mínim de la constant Kp per complir l'especificació?
1.4. Quina serà la consigna en llaç tancat?

$\boxed{1.1.}$ $G(s) = \dfrac{0{,}89}{0{,}12s+1}$ $\quad K_t = 0{,}007$ V/rpm

1000 rpm equival a : $1000 \text{ rpm} \cdot \dfrac{0{,}007 \text{ V}}{\text{rpm}} = 7\text{V}$ a la sortida.

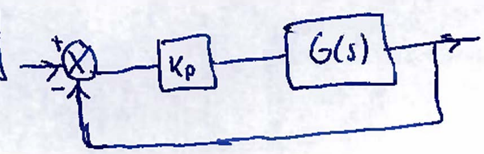
$K = 0{,}89 = \dfrac{7}{A} \rightarrow A = \dfrac{7}{0{,}89} = \underline{\underline{7{,}865\text{V}}}$ ✓

* Es necessitarà una entrada graó d'amplitud 7,865 V.

$\boxed{1.2.}$ $\tau = 0{,}12s \longrightarrow t_s\ (2\%) = 4\tau = 4 \cdot 0{,}12 = \underline{\underline{0{,}48s}}$ ✓

* El temps d'establiment seguint el criteri del 2% és de 0,48 s.

$\boxed{1.3.}$



$G_{LLT}(s) = \dfrac{K_p \cdot G(s)}{1 + K_p G(s)} = \dfrac{K_p \cdot 0{,}89}{0{,}12s + 1 + 0{,}89 K_p} =$

$= \dfrac{\frac{0{,}89 K_p}{1+0{,}89 K_p}}{\frac{0{,}12}{1+0{,}89 K_p} s + 1} \leadsto \tau = \dfrac{0{,}12}{1+0{,}89K_p}$

continua darrere

$t_s = 0{,}1\,s = 4\tau \rightarrow \tau = \dfrac{0{,}1}{4} = 0{,}025\,s$

Igualant expressions:

$$0{,}025 = \frac{0{,}12}{1+0{,}89\,K_p} \longrightarrow \boxed{K_p = 4{,}27}$$

* El valor de K_p serà de 4,27.

$\boxed{1.4}$

El nou guany estàtic és : $K' = \dfrac{0{,}89\,K_p}{1+0{,}89\,K_p} = \dfrac{0{,}89 \cdot 4{,}27}{1+0{,}89\cdot 4{,}27} = 0{,}79167$

$$K' = 0{,}79167 = \frac{7}{A} \longrightarrow \boxed{A = \frac{7}{0{,}79167} = 8{,}84\,V}$$

* La consigna en llaç tancat serà una entrada graó d'amplitud 8,84 V.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

$\frac{3}{3}$ MB + $\frac{2}{3}$ + $\frac{2}{2}$ HB

EXAMEN FINAL DE CONTROL AUTOMÀTIC

Grau en Enginyeria en Tecnologies Aeroespacials
Grau en Enginyeria en Vehicles Aeroespacials
Dilluns 18 de Gener de 2021 a les 18:00 hores

La durada total de l'examen ... e 10.

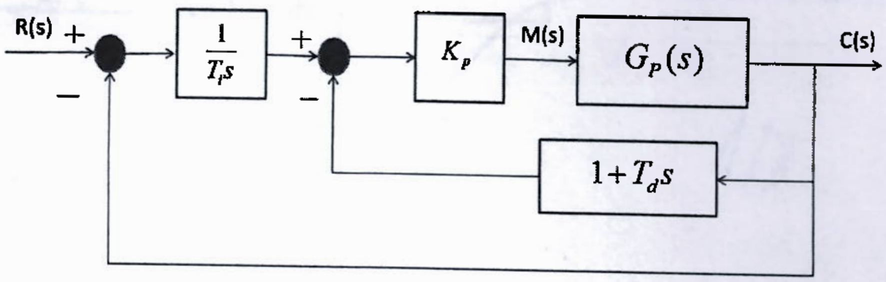
Nom i Cog

2. **(3 p** ... del qual es cone ...

$$C(s)G(s) = \frac{K_P(0.5+s)(10+5s)}{s^2(-0.5+s)}$$

2.1. Per a Kp=1, determineu el diagrama freqüencial de Bode i especifiqueu quines son les característiques del sistema en llaç obert: guany en continu, pulsació de tall, pulsació de ressonància, pic de ressonància i ample de banda.
2.2. Per a Kp=1, analitzeu pel mètode de Nyquist l'estabilitat del sistema en llaç tancat. Determineu l'interval de Kp que fa estable el sistema en llaç tancat.
2.3. Comproveu pel mètode de Routh els resultats de l'apartat precedent.

3. **(3 punts)** Donat el sistema de control de la figura següent



$$G_P(s) = \frac{(s+10)}{(s+0.2)}$$

3.1. Determineu els valors de Kp, Ti i Td de tal forma que la resposta del sistema realimentat sigui estable amb un temps d'establiment de 4 segons i un sobreimpuls (overshoot) del 16%.
3.2. Determineu els valors de Kp, Ti i Td per aconseguir una resposta critica de segon ordre ("overshoot" percentual MP=0%) i un temps d'estabilització de 4 segons.
3.3. Determineu quina és la precisió del sistema davant d'un graó, una rampa i una paràbola unitaris.

$$C(s)\,G(s) = \frac{k_p\,(0{,}5+s)(10+5s)}{s^2\,(-0{,}5+s)}$$

$\boxed{2.1.}$

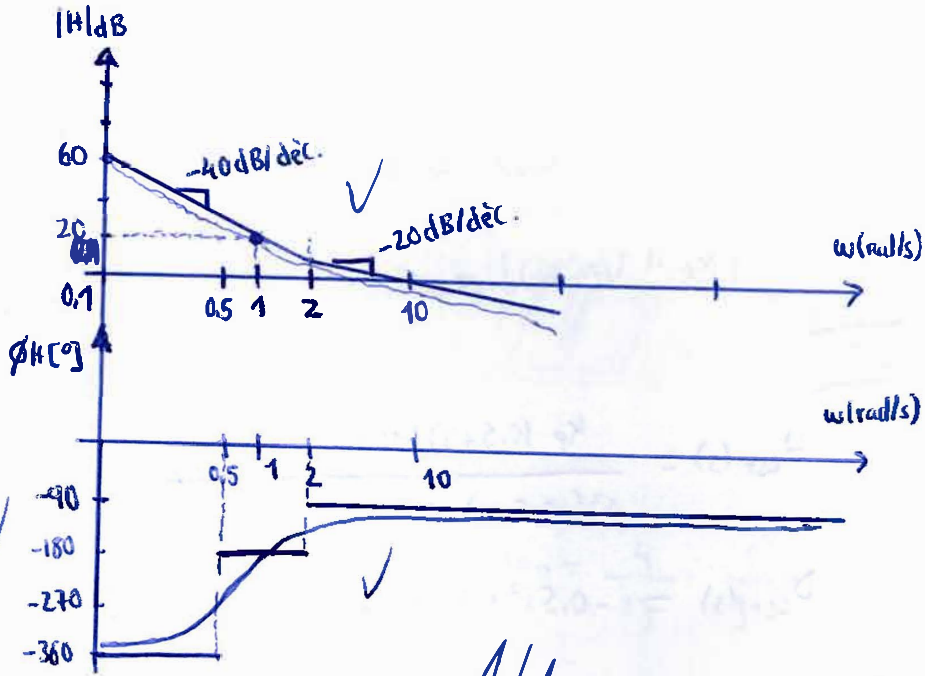
$k_p = 1$

$$H(s) = C(s)\,G(s) = \frac{(0{,}5+s)(10+5s)}{s^2(-0{,}5+s)} = \frac{\cancel{0{,}5}\cdot 10\cdot\left(1+\frac{s}{0{,}5}\right)\left(1+\frac{s}{2}\right)}{\cancel{0{,}5}\,s^2\left(-1+\frac{s}{0{,}5}\right)} =$$

$$= \frac{10\left(1+\frac{s}{0{,}5}\right)\left(1+\frac{s}{2}\right)}{s^2\left(-1+\frac{s}{0{,}5}\right)}$$

	0 – 0,5	0,5 – 2	2 – ∞
10	0 / 0	0 / 0	0 / 0
$1+\frac{s}{0{,}5}$	0 / 0	+1 / +1	+1 / +1
$1+\frac{s}{2}$	0 / 0	0 / 0	+1 / +1
$1/s^2$	-2 / -2	-2 / -2	-2 / -2
$\left(-1+\frac{s}{0{,}5}\right)^{-1}$	0 / -2	-1 / -1	-1 / -1
TOTAL	-2 / -4	-2 / -2	-1 / -1

✓



✓ ✓

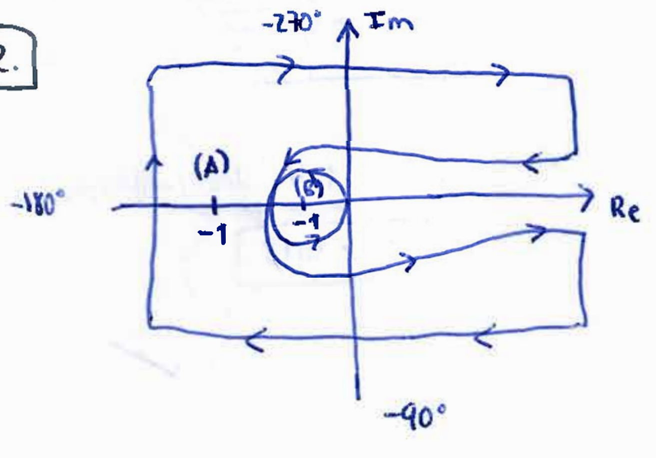
1/1

* Guany en contínua: ∞ (infinit). ✓
* Pulsació de tall:

$$|H(j\omega)| = \frac{10\cdot\cancel{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{0{,}5}\right)^2}}\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}}{\omega^2\cancel{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{0{,}5}\right)^2}}} = 1 \rightarrow \boxed{\omega_{tall} = 5{,}34\ rad/s}$$ ✓

* Pulsació de ressonància / pic de ressonància $\rightarrow$ no en té. ✓
* Ample de banda: 0 – 0 [rad/s]; es podria dir que no existeix ample de banda.

$\boxed{2.2.}$



Criteri Nyquist: $\boxed{Z_+ = P_+ + N}$

En aquest cas: $P_+ = 1$ (1 pol de part real positiva).

(B) $\left.\begin{matrix} P_+ = 1 \\ N = -1 \end{matrix}\right\}$ $Z_+ = 1-1 = 0 \rightarrow$ estable ✓

(A) $\left.\begin{matrix} P_+ = 1 \\ N = 1 \end{matrix}\right\}$ $Z_+ = 1+1 = 2 \rightarrow$ inestable ✓

Cal veure en quina situació ens trobem per a $k_p = 1$

Trobem la $\omega_{-180°}$:

$$\measuredangle H(j\omega) = \arctg\left(\frac{\omega}{0{,}5}\right) + \arctg\left(\frac{\omega}{2}\right) - 180° - \arctg\left(-\frac{\omega}{0{,}5}\right) = -180°$$

$$\hookrightarrow \omega_{-180°} \simeq 1{,}5 \text{ rad/s}$$

Calculem el mòdul per aquesta $\omega_{-180°}$

$$|H(j\omega_{-180°})| = \frac{10 \cdot \sqrt{1+\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}}{\omega^2} = \frac{10 \cdot \sqrt{1+\left(\frac{1{,}5}{2}\right)^2}}{1{,}5^2} = 5{,}556 > 1$$

1,5 / 1,5

↓

ens trobem en la situació (B)

↓

$\boxed{\text{sistema estable en llaç tancat}}$

Per determinar l'interval de k_p s'imposa:

$$|k_p H(j\omega_{-180°})| = 5{,}556\, k_p > 1 \rightarrow k_p > \frac{1}{5{,}556} \rightarrow \boxed{k_p > 0{,}18}$$ ✓

$\boxed{2.3.}$

$$H_{LLT}(s) = \frac{k_p(0{,}5+s)(10+5s)}{s^2(-0{,}5+s) + k_p(0{,}5+s)(10+5s)}$$

$$D_{LLT}(s) = -0{,}5s^2 + s^3 + k_p(5+12{,}5s+5s^2) = s^3 + (5k_p - 0{,}5)s^2 + 12{,}5k_p s + 5k_p$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 12{,}5\,k_p \\ s^2 & 5k_p - 0{,}5 & 5\,k_p \\ s^1 & b & \\ s^0 & 5\,k_p & \end{array}$$

$$b = \frac{(5k_p - 0{,}5)\,12{,}5\,k_p - 5\,k_p}{5k_p - 0{,}5} = \frac{62{,}5\,k_p^2 - 11{,}25\,k_p}{5k_p - 0{,}5}$$

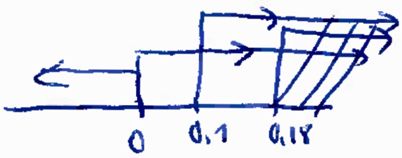
0,5 / 0,5

Condicions:

$5k_p - 0{,}5 > 0 \rightarrow k_p > \frac{0{,}5}{5} \rightarrow k_p > 0{,}1$

$62{,}5\,k_p^2 - 11{,}25\,k_p > 0$ → $k_p < 0$; $k_p > 0{,}18$

$5k_p > 0 \rightarrow k_p > 0$



Perquè compleixi totes les condicions cal que $\boxed{k_p > 0{,}18}$ ✓

↓

resultat confirmat ✓

$\frac{2,5}{3}$

3.1.

Primer llaç: $G_{eq_1}(s) = \dfrac{K_p \cdot G_p(s)}{1 + K_p \cdot G_p(s)(1+T_d s)} = \dfrac{K_p \cdot (s+10)}{(s+0,2) + K_p(s+10)(1+T_d s)}$

Segon llaç: $G_{eq}(s) = \dfrac{\frac{1}{T_i s} \cdot G_{eq_1}(s)}{1 + \frac{1}{T_i s} \cdot G_{eq_1}(s)} = \dfrac{K_p(s+10)}{K_p(s+10) + T_i s\left[(s+0,2) + K_p(s+10)(1+T_d s)\right]}$

$$\boxed{D_{REAL}(s)} = K_p s + 10K_p + T_i s\left[s + 0,2 + (K_p s + 10K_p)(1+T_d s)\right] =$$

$$= K_p s + 10K_p + T_i s\left[s + 0,2 + K_p s + 10K_p + K_p T_d s^2 + 10 K_p T_d s\right] =$$

$$= \boxed{T_i K_p T_d s^3 + (T_i + T_i K_p + 10 T_i K_p T_d)s^2 + (K_p + 0,2T_i + 10K_pT_i)s + 10K_p}$$

$$= \cancel{s^3 + \frac{1 + K_p + 10K_pT_d}{K_pT_d}s^2 + \frac{K_p + 0,2T_i + 10K_pT_i}{T_iK_pT_d}s + \frac{10}{T_iT_d}}$$

0,8

Especificacions:

$t_s = 4s$ $\rightarrow$ $4 = \dfrac{4}{\xi\omega_n} \rightarrow \omega_n = \dfrac{4}{4\xi} = \dfrac{1}{\xi} = 1,9846$ [rad/s]

$M_p = 0,16 = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \rightarrow \xi = 0,5039$

0,25

$$D_{desitjat}(s) = (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s+\alpha) = \underbrace{(s^2 + 2s + 3,9386)}_{s_{1,2} = -1 \pm 1,714j}(s+\alpha)$$

$\hookrightarrow \alpha \geq 5 \cdot 1 \rightarrow \alpha = 5$ ojo! α hauria de ser > 10!

$$\boxed{D_{desitjat}(s) = (s^2 + 2s + 3,9386)(s+5) = s^3 + 7s^2 + 13,9386s + 19,693}$$

0,25

Igualant denominadors:

$$\cancel{\begin{cases} 7 = \dfrac{1 + K_p + 10K_pT_d}{K_pT_d} \\ 13,9386 = \dfrac{K_p + 0,2T_i + 10K_pT_i}{T_iK_pT_d} \\ 19,693 = \dfrac{10}{T_iT_d} \end{cases}}$$

$\Rightarrow$ $\cancel{1 = T_iK_pT_d}$, $\cancel{7 = T_i(1 + K_p + 10K_pT_d)}$, $\cancel{13,9386 = K_p + 0,2T_i + 10K_pT_i}$, $\cancel{19,693 = 10K_p}$ $\rightarrow$ $\cancel{K_p = 1,969}$

$\cancel{K_p = 1,969}$, $\cancel{T_i = 0,602}$ $\rightarrow$ $\cancel{T_d = 0,440}$

$\cancel{K_p = 1,969}$ $\rightarrow$ $\cancel{T_i = 0,602}$

$$D_{REAL}(s) = s^3 + \frac{1+K_p+10K_pT_d}{K_pT_d}s^2 + \frac{K_p+0{,}2T_i+10K_pT_i}{K_pT_dT_i}s + \frac{10}{T_iT_d}$$

$$D_{desitjat}(s) = s^3 + 7s^2 + 13{,}9386s + 19{,}693$$

Igualant:

$$\frac{1+K_p+10K_pT_d}{K_pT_d} = 7 \rightarrow 1+K_p+3K_pT_d = 0 \rightarrow K_p = \frac{-1}{1+3T_d} \xrightarrow{T_d=0{,}78} \boxed{K_p = -0{,}3}$$

ojo!!

$$\frac{K_p+0{,}2T_i+10K_pT_i}{K_pT_dT_i} = 13{,}9386 \rightarrow \text{substituint } K_p(T_d);\ T_i(T_d) \text{ s'obté: } \boxed{T_d = 0{,}78\,s}$$

$$\frac{10}{T_iT_d} = 19{,}693 \rightarrow T_i = \frac{10}{19{,}693\,T_d} \xrightarrow{T_d=0{,}78} \boxed{T_i = 0{,}651\,s}$$

0,25

Els paràmetres són $\begin{cases} K_p = -0{,}3 \\ T_i = 0{,}651 \\ T_d = 0{,}78 \end{cases}$

3.2.

Especificacions: $M_p = 0 \rightarrow \xi = 1$

$t_s = 4\,s \rightarrow 4 = \frac{4}{\xi\omega_n} = \frac{4}{\omega_n} \rightarrow \omega_n = 1\,rad/s$

$$D_{desitjat}(s) = (s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s+\alpha) = \underbrace{(s^2+2s+1)}_{s_{1,2}=-1}(s+\alpha)$$

$s_{1,2} = -1 \rightarrow \alpha \geq 1.5 \rightarrow \alpha = 5$ ojo!

0,06 / 1

$$D_{desitjat}(s) = (s^2+2s+1)(s+5) = s^3 + 7s^2 + 11s + 5$$

Igualant:

$$\frac{1+K_p+10K_pT_d}{K_pT_d} = 7 \rightarrow 1+K_p+3K_pT_d = 0 \rightarrow K_p = \frac{-1}{1+3T_d} \xrightarrow{T_d=0{,}883} \boxed{K_p = -0{,}274}$$

$$\frac{K_p+0{,}2T_i+10K_pT_i}{K_pT_dT_i} = 11 \rightarrow \text{substituint } K_p(T_d);\ T_i(T_d) \text{ s'obté: } \boxed{T_d = 0{,}883\,s}$$

$$\frac{10}{T_iT_d} = 5 \rightarrow T_i = \frac{2}{T_d} \xrightarrow{T_d=0{,}883} \boxed{T_i = 2{,}265\,s}$$

ojo

Els paràmetres són $\begin{cases} K_p = -0{,}274 \\ T_i = 2{,}265 \\ T_d = 0{,}883 \end{cases}$

3.3.

→ a continuació del 4.2

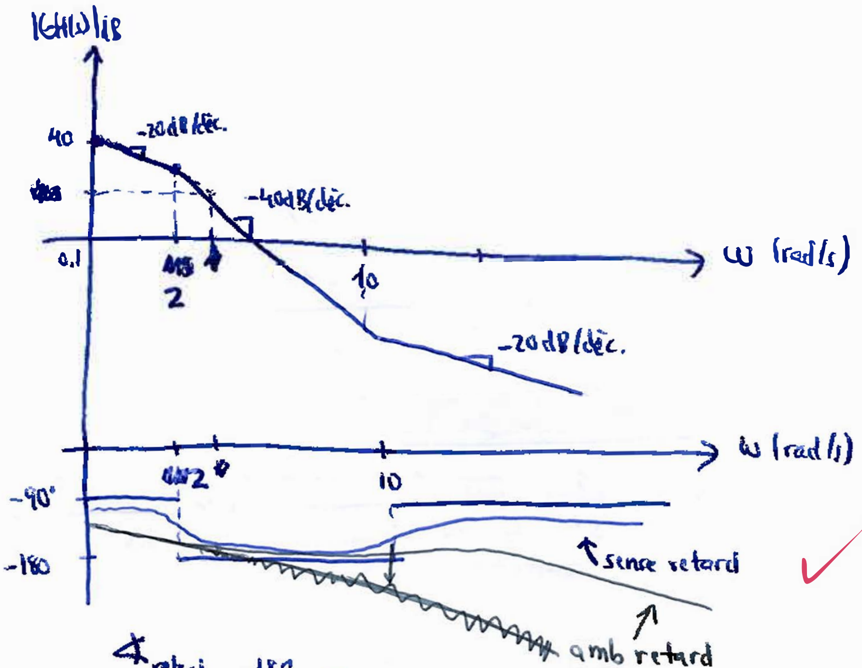
$$GH(s) = \frac{K(s+10)}{s(0{,}5s+1)} e^{-0{,}01s}$$

2/2

$\boxed{4.1.}$

$$K=1 \rightarrow GH(s) = \frac{s+10}{s(0{,}5s+1)} e^{-0{,}01s} = \frac{10 \cdot (s/10+1)}{s(0{,}5s+1)} e^{-0{,}01s}$$

	0 – 2	2 – 10	10 – ω
10	0 / 0	0 / 0	0 / 0
$s/10+1$	0 / 0	0 / 0	+1 / +1
$1/s$	-1 / -1	-1 / -1	-1 / -1
$(0{,}5s+1)^{-1}$	0 / 0	-1 / -1	-1 / -1
TOTAL	-1 / -1	-2 / -2	-1 / -1



$$\measuredangle_{retard} = -\frac{180}{\pi} \omega T_0$$

$$|GH(j\omega)| = \frac{10\sqrt{\left(\frac{\omega}{10}\right)^2+1}}{\omega\sqrt{(0{,}5\omega)^2+1}} = 1 \rightarrow \underline{\omega_{MF} = 4{,}47 \text{ rad/s}}$$

$$\measuredangle GH(j\omega) = \text{arctg}\left(\frac{\omega}{10}\right) - 90^\circ - \text{arctg}(0{,}5\omega) - \frac{180}{\pi}\omega T_0 = -180^\circ \rightarrow \underline{\omega_{MG} = 151{,}82 \text{ rad/s}}$$

$$MG = -|GH(j\omega_{MG})|_{dB} = -\left[20\log\left(\frac{10 \cdot \sqrt{\left(\frac{\omega_{MG}}{10}\right)^2+1}}{\omega_{MG}\sqrt{(0{,}5\omega_{MG})^2+1}}\right)\right] = \boxed{37{,}59 \text{ dB}}$$

$$MF = 180 + \measuredangle GH(j\omega_{MF}) = 180 - 134{,}37 = \boxed{45{,}63^\circ}$$

$\boxed{4.2.}$

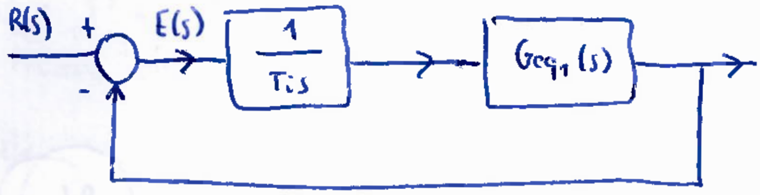
Per $K_1 = 1 \rightarrow MG_1 = 37{,}59$ dB

Per $K_2 = ? \rightarrow MG_2 = 16$ dB

$$\boxed{K_2 = K_1 \cdot 10^{(MG_1 - MG_2)/20} = 1 \cdot 10^{(37{,}59-16)/20} = 10^{1{,}0795} = 12}$$

$\boxed{33}$

3.3.



$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+\frac{1}{T_i s}\cdot G_{eq_1}(s)} \qquad e(\infty) = \lim_{s\to 0} s\, E(s)$$

0,5

- Error davant graó (unitari):

$$\boxed{e(\infty) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\cdot\frac{1}{\cancel{s}}\cdot\frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{T_i s}G_{eq_1}(s)}} = \frac{1}{1+\infty} = 0}$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{G_{eq_1}(s)}{T_i s} = \lim_{s\to 0}\frac{K_p\,(s+10)}{T_i s\,[s+0{,}2+K_p\,(s+10)(1+T_d s)]} = \frac{10\,K_p}{0\cdot(0{,}2+10K_p)} = \infty$$

- Error davant rampa (unitària):

$$\boxed{e(\infty) = \lim_{s\to 0}\cancel{s}\cdot\frac{1}{s^{\cancel{2}}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{T_i s}G_{eq_1}(s)} = \frac{1}{\lim_{s\to 0}\cancel{s}\cdot\frac{1}{T_i \cancel{s}}G_{eq_1}(s)} = \frac{1}{\lim_{s\to 0}\frac{G_{eq_1}(s)}{T_i}} = \frac{0{,}2\,T_i+10K_pT_i}{10\,K_p}}$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{G_{eq_1}(s)}{T_i} = \lim_{s\to 0}\frac{K_p\,(\cancel{s}+10)}{T_i\,[\cancel{s}+0{,}2+K_p\,(\cancel{s}+10)(1+T_d\cancel{s})]} = \frac{10\,K_p}{T_i\,(0{,}2+10K_p)} = \frac{10\,K_p}{0{,}2\,T_i+10K_pT_i}$$

- Error davant paràbola (unitària):

$$\boxed{e(\infty) = \lim_{s\to 0}\cancel{s}\cdot\frac{1}{s^{\cancel{3}2}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{T_i s}G_{eq_1}(s)} = \frac{1}{\lim_{s\to 0}\frac{s\,G_{eq_1}(s)}{T_i}} = \frac{1}{0} = \infty}$$

$$\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{G_{eq_1}(s)}{T_i} = 0\cdot\frac{10\,K_p}{0{,}2T_i+10K_pT_i} = 0$$